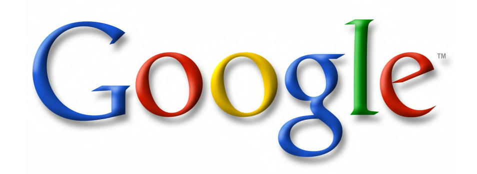


Mathematische Bibliothek

Gemeinverständliche Darstellungen aus der Elementarmathematik für Schule und Leben

Unter Mitwirkung von Fachgenossen herausgegeben von

Dr. W. Lietzmann ... Dr. A. Witting

Die Sa ... gloser
Folge ... eresse
an de ... en, es
in ang ... einhin
in der ... unter-
richten ... d ein-
gehen ... ie all-
gemei ... isches
Gewic ... Leser
— ohn ... Kennt-
nisse ... führen.

1. E. ... ölkern in ...
2. H. ... n und hist...
3. W. ... Aus-blic... 1912.
4. O. ... ungen. Mit ...
5. H. ... 12.
6. M. ... Mit 18 ...
7. H. ... 1912.
8. P. Meth, Die Theorie der Planetenbewegung. 1912.
9. A. Witting, Infinitesimalrechnung. 1912.

In Vorbereitung befinden sich:

E. Beutel, Die Quadratur des Kreises.
W. Lietzmann, Der Eulersche Polyedersatz.
A. Schreiber, Ortsbestimmung auf dem Lande, zur See und in der Luft.
H. Wieleitner, Eleml. Mengenlehre.
M. Winkelmann, Der Kreisel.
A. Witting, Graphische Darstellungen.
A. Witting, Abgekürztes Rechnen.
A. Witting und M. Gebhardt, Beispiele zur Geschichte der Mathematik.
P. Zühlke, Stereometr. Konstruktion.

MATHEMATISCHE BIBLIOTHEK
HERAUSGEGEBEN VON W. LIETZMANN UND A. WITTING
8

THEORIE DER PLANETENBEWEGUNG

VON

DR. PAUL METH
OBERLEHRER AN DER HERDERSCHULE
IN BERLIN-WESTEND

MIT 17 FIGUREN IM TEXT UND EINER TAFEL



LEIPZIG UND BERLIN
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER
1912

VORWORT.

Die vorliegende „Theorie der Planetenbewegung" geht von den elementaren Methoden aus, die Möbius in seiner „Mechanik des Himmels" (Leipzig 1843, abgedruckt im IV. Band der gesammelten Werke) verwendet. Große algebraische Entwicklungen sind vermieden und das Geometrische soweit als möglich in den Vordergrund gerückt worden. Die für das Verständnis notwendigen mathematischen Kenntnisse entsprechen ungefähr denen eines Oberprimaners. Wegen der Infinitesimalrechnung, die an mehreren Stellen auftritt, verweise ich auf das Bändchen von Witting in dieser Sammlung „Einführung in die Infinitesimalrechnung".

Wer tiefer in den hier behandelten Gegenstand eindringen will, mag das oben erwähnte Werk von Möbius und die vortreffliche Schrift von Airy: „Gravitation" (übersetzt von Hoffmann, Leipzig 1891) lesen, in der die wichtigsten Erscheinungen der Störungen in leichtverständlicher Form auseinandergesetzt werden. Bei Abfassung dieses Bändchens würde auch die „mécanique céleste" von Tisserand und das „Lehrbuch der Bahnbestimmung" (Leipzig, 1906) von Bauschinger herangezogen. Ich habe hier ein Kapitel über die Zeitrechnung aufgenommen, weil dieser Gegenstand nur im Zusammenhang mit der Theorie der Erdbewegung richtig verstanden werden kann. Die graphische Darstellung der Zeitgleichung mit ihren Komponenten habe ich sonst noch nicht gefunden und glaube, daß sie manchem Leser ein willkommenes Hilfsmittel zum tieferen Verständnis sein wird.

Schließlich möchte ich an dieser Stelle den Herren Herausgebern der Sammlung meinen verbindlichsten Dank aussprechen, die mich bei der Durchsicht des Manuskripts und der Druckbogen in liebenswürdigster Weise unterstützt haben, und auf deren Anregung hin von mir noch zahlreiche kleine Zusätze und Änderungen im Text vorgenommen worden sind.

Charlottenburg, August 1912.

Der Verfasser.

INHALTSVERZEICHNIS.

Seite

Erster Abschnitt.

Einleitende Sätze aus der Mechanik.

Zweiter Abschnitt.

Beschreibung der Bahnen im Sonnensystem und Rückschluß auf die wirkenden Kräfte.

Dritter Abschnitt.

Das Newtonsche Gravitationsgesetz und seine Anwendungen.

ERSTER ABSCHNITT.

EINLEITENDE SÄTZE AUS DER MECHANIK.

1. GESCHWINDIGKEIT UND BESCHLEUNIGUNG.[1]

Ein Punkt, der zur Zeit $t = 0$ eine Bewegung beginnt, soll zu einer beliebigen Zeit t die Strecke s und zur Zeit t_1 die Strecke s_1 zurückgelegt haben. Die einfachste Art der Bewegung ist dann diejenige, bei der die Maßzahlen der Zeiten und zurückgelegten Wege proportional sind, wo also

$$s = at \quad \text{und} \quad s_1 = at_1$$

ist, wie z. B. bei einem gleichmäßig fahrenden Eisenbahnzuge, der nach 15^m 20 km, nach 30^m 40 km usw. vom Ausgangspunkte entfernt ist. Der Quotient

$$\frac{s_1 - s}{t_1 - t} = a,$$

der diesen konstanten Wert behält, gleichgültig, wie man die Zeiten t und t_1 wählen mag, heißt die *Geschwindigkeit* des Punktes; dieselbe wird also definiert als Quotient (der Maßzahlen) der durchlaufenen Strecke $(s_1 - s)$ und der dazu verwendeten Zeit $(t_1 - t)$.

Eine Bewegung mit konstanter Geschwindigkeit, bei der also in gleichen Zeiten gleiche Strecken zurückgelegt werden, heißt eine *gleichförmige Bewegung*.

Der vorher erwähnte Eisenbahnzug, welcher in einer Stunde 80 km zurücklegen würde, fährt aber in Wirklichkeit nicht in jeder Viertelstunde 20 km, sondern bald weniger, bald mehr; ja er könnte sogar auf einer Haltestelle $\frac{1}{4}$ Stunde Aufenthalt haben und in dieser Zeit den Weg Null zurück-

---

1) Vgl. hierüber auch in dieser Sammlung Bd. 9: A. Witting, „Einführung in die Infinitesimalrechnung“.

legen. Die Stundengeschwindigkeit von 80 km ist nur ein Durchschnittswert, der Quotient $\frac{s_1 - s}{t_1 - t}$ ändert also seinen Zahlenwert je nach der Wahl von t und t_1, die Bewegung heißt deshalb *ungleichförmig*. Das Verhältnis $\frac{s_1 - s}{t_1 - t}$ wird die *durchschnittliche* oder *mittlere Geschwindigkeit* in der Zeit von t bis t_1 genannt.

Die Abhängigkeit der zurückgelegten Weglänge s von der Zeit t stellt man anschaulich dar, indem man in einem Koordinatensystem die Zeiten zu Abszissen und die durchlaufenen Wege zu Ordinaten macht. Jede gleichförmige Bewegung wird dann durch eine gerade Linie repräsentiert, weil bei dieser

$$\frac{s_1 - s}{t_1 - t} = \text{const}$$

ist. Über die Gestalt der Bahn, ob sie gerade oder krumm ist, will diese Darstellung natürlich nichts aussagen.

Ist die Geschwindigkeit $\frac{s_1 - s}{t_1 - t}$ veränderlich, so erhält man eine gewisse Kurve (Fig. 1), auf der wir die Punkte $P(s, t)$ und $P_1(s_1, t_1)$ ins Auge fassen wollen. Die Sehne P_1P möge mit der Abszissenachse den Winkel α bilden, so daß

$$\frac{s_1 - s}{t_1 - t} = \tan \alpha$$

ist. Läßt man P_1 immer näher an P heranrücken, so erhält man durch

$$\lim_{t_1 = t} \left(\frac{s_1 - s}{t_1 - t} \right) = \frac{ds}{dt}$$

die Richtung der Tangente im Punkte P. Man nennt diesen Differentialquotienten die *Geschwindigkeit zur Zeit t*; seine Berechnung setzt voraus, daß man die Weglänge s als Funktion der Zeit t kenne. Gegenüber der mittleren Geschwindigkeit hat er den Vorzug, nur noch von einem Zeitmoment t abhängig zu sein.

Fig. 1.

Es sei zur Zeit t die Geschwindigkeit $u = \frac{ds}{dt}$ und zur Zeit t_1 die Geschwindigkeit $u_1 = \left(\frac{ds}{dt}\right)_1$. Die Geschwindigkeit hat sich in der Zeit $t_1 - t$ also um den Betrag $u_1 - u$ geändert. $\frac{u_1 - u}{t_1 - t}$ heißt die mittlere Beschleunigung in der Zeit $t_1 - t$. Ist dieser Quotient stets konstant, so heißt die Bewegung gleichmäßig beschleunigt, wie z. B. beim freien Fall.

Um auch die Bewegungen mit veränderlicher Beschleunigung behandeln zu können, berechnet man den Quotienten, indem man den Zeitpunkt t_1 beliebig nahe an t heranrücken läßt. Im Grenzfalle wird

$$\lim_{t_1 = t}\left(\frac{u_1 - u}{t_1 - t}\right) = \frac{du}{dt} = \frac{d\left(\frac{ds}{dt}\right)}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}.$$

Dieser erste Differentialquotient der Geschwindigkeit oder zweite Differentialquotient der Weglänge ist die *Beschleunigung zur Zeit t*.

Es sei noch daran erinnert, daß Geschwindigkeit und Beschleunigung durch gerichtete Strecken dargestellt werden können, also wird auch die treibende Kraft nach Größe und Richtung durch eine Strecke dargestellt, denn bekanntlich ist die Kraft P gleich Masse $\times$ Beschleunigung, oder

$$P = m \cdot \frac{d^2s}{dt^2}.$$

2. GEOMETRISCHE ADDITION DER BEWEGUNGEN UND KRÄFTE.

Ein Punkt möge sich in der Zeiteinheit geradlinig und gleichförmig von O nach A bewegen (Fig. 2), gleichzeitig aber soll die Strecke OA eine gleichförmige Bewegung ausführen, bei der sie sich selber stets parallel bleibt, so daß in der Zeiteinheit O nach B und A nach

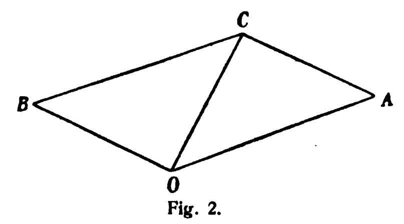


Fig. 2.

C gelangt. $OACB$ ist also ein Parallelogramm. Nach Ablauf der Zeiteinheit befindet sich der bewegte Punkt in C, und man kann seine Bewegung auffassen als zusammengesetzt aus den Bewegungen auf OA und OB. Die *Komponenten* OA und OB setzen sich zur *Resultante* OC, der Parallelogrammdiagonale, zusammen. Gewöhnlich stellt man die Konstruktion von OC so dar, daß man AC gleich und parallel OB (in Zeichen $AC \# OB$) in A anträgt. OC heißt die *geometrische Summe* der Komponenten, und man schreibt

$$OA + OB = OC$$

oder

$$OA + AC = OC,$$

wobei das Additionszeichen eine etwas andere Bedeutung hat als in der Algebra.

Da die Wege OA und OB in der Zeiteinheit zurückgelegt wurden, so kann man sie auch als Geschwindigkeiten bezeichnen und erhält dadurch die Regel für die Zusammensetzung von zwei Geschwindigkeiten durch die geometrische Addition. Der Punkt, welcher sich auf OA bewegt, während OA lauter einander parallele Lagen annimmt, scheint für einen Beobachter, der die Bewegung AC ausführt, in C aus der Richtung BC zu kommen. Bei dieser Betrachtungsweise gestattet die hier behandelte Zusammensetzung der Bewegungen eine wichtige Anwendung auf eine optische Erscheinung.

Wir wollen nämlich annehmen, daß sich in O der Mittelpunkt der Sonne, in A die Erde befinde, und daß $OA = OC$ sei. Das Licht braucht, um von O nach A oder C zu gelangen, rund 8^m. In dieser Zeit legt die Erde in ihrer als Kreis betrachteten Bahn einen Bogen AC von $20''$ zurück, den man wegen seiner Kleinheit als geradlinig ansehen kann. Ein Punkt der wellenförmigen Lichtbewegung auf OC sei identisch mit dem am Anfang dieser Nummer betrachteten bewegten Punkte, der in C von B her einzutreffen scheint. Aus B scheint also auch das Licht zu kommen, das O aussendet, d. h. O wird in der Richtung CB gesehen, die um den Winkel $OCB = COA = 20''$ (etwa $\frac{1}{100}$ Sonnendurchmesser) gegen die wahre Richtung CO geneigt ist. Steht die Erde zur Zeit t in A und zur Zeit $t + 8^{\min}$ in C, so

ist die scheinbare Richtung (CB) der Sonne zur Zeit $t + 8^{\text{min}}$ gleich der wahren Richtung (AO) zur Zeit t.

Diese Erscheinung gehört zu denjenigen, die man in der Astronomie unter dem Namen der *Aberration des Lichtes* zusammenfaßt.

Da Beschleunigungen als Strecken dargestellt werden, so kann man in Figur 2 die Komponenten OA und OB auch als Beschleunigungen auffassen oder schließlich, mit der Maßzahl der Masse multipliziert, als treibende Kräfte. Die geometrische Addition derselben findet in der Statik ihr Analogon im Satze vom Kräfteparallelogramm.

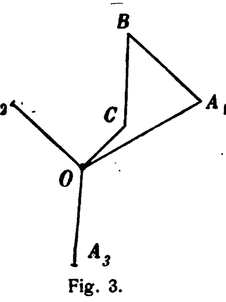


Fig. 3.

Strecken, die wie die in Rede stehenden nach Größe und Richtung gegeben sind, pflegt man *Vektoren* zu nennen.

Die Definition der Addition, welche vorher für 2 Vektoren gegeben wurde, läßt sich sofort auf beliebig viele erweitern. Man erhält z. B. den Summenvektor $OA_1 + OA_2 + OA_3$ (Fig. 3), indem man $A_1B \# OA_2$ und $BC \# OA_3$ macht. Dann ist

$$OC = OA_1 + OA_2 + OA_3.$$

Im allgemeinen liegen 3 Vektoren nicht in einer Ebene; in diesem Falle ist OA_1BC ein räumliches Polygon, das nach derselben Regel zu konstruieren ist.

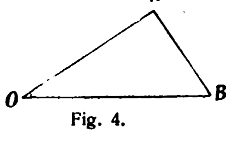


Fig. 4.

Analog der algebraischen Addition gilt hier der Satz, daß Größe und Richtung des Summenvektors von der Reihenfolge der Summanden unabhängig ist.

In Fig. 4 ist $OA + AB = OB$, also ist AB diejenige Strecke, die man zu OA addieren muß, um OB zu erhalten. Man nennt daher, wie in der Algebra, AB die Differenz der beiden anderen Strecken:

$$AB = OB - OA.$$

Dagegen wäre $BA = BO + OA$.

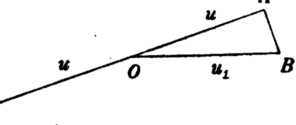


Fig. 5.

Ein Punkt möge in der Zeiteinheit die Strecke $A'O = u$ zurück-

legen (Fig. 5). Sobald er O passiert, wirkt während der nächsten Zeiteinheit eine Kraft auf ihn ein, so daß er den Weg $OB = u_1$ einschlägt, während er ohne die Kraft sich auf $OA = u$ bewegt hätte. u_1 und u sind die Geschwindigkeiten; die mittlere Beschleunigung, welche die Kraft erteilt hat, ist nach dem Vorigen $u_1 - u = AB$ nach Größe und Richtung.

3. KONSTRUKTION DER BAHN EINES BEWEGTEN PUNKTES.

Ein Punkt beginne seine Bewegung zur Zeit t_0 an der Stelle A_0 mit der Geschwindigkeit $u_0 = A_0A_1$ (Fig. 6). Wenn, wie in diesem Falle, Ort und Geschwindigkeit für eine bestimmte Zeit gegeben sind, so sagt man, die *Anfangsbedingungen* der Bewegung seien bekannt. In A_1 erteilt eine Kraft dem Punkte die Beschleunigung A_1B_1, so daß sich die Geschwindigkeit in der nächsten Zeiteinheit geometrisch aus der Summe $u_0 + A_1B_1$ zusammensetzt. Dies ist aber $= A_0B_1$. Man erhält den Weg im zweiten Zeitintervall, indem man $A_1A_2 \# A_0B_1$ macht. In A_2 erhält der Punkt die Beschleunigung A_2B_2, so daß er die Geschwindigkeit

$$A_1A_2 + A_2B_2 = A_1B_2$$

bekommt. Sein Weg in der 3. Zeiteinheit ist danach $A_2A_3 \# A_1B_2$ usf. Man erkennt hieran, daß man die Bahn $A_0A_1A_2A_3 \ldots$ bestimmen kann, wenn die Anfangsbedingungen und in jeder Zeiteinheit die Beschleunigungen gegeben sind.

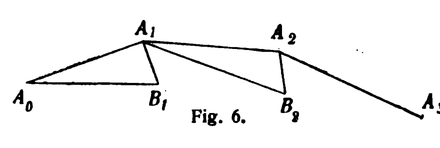


Fig. 6.

Je kleiner man die Zwischenzeiten wählt, um so weniger sprunghaft ändern sich die Beschleunigungen A_1B_1, A_2B_2 usw., und um so mehr nähert sich das Polygon $A_0A_1A_2A_3 \ldots$ der Gestalt einer stetig gekrümmten Kurve.

Die Konstruktion zeigt, daß es nur eine einzige Bahnkurve gibt, also daß die Bahn eindeutig bestimmt ist durch die Anfangsbedingungen und das Kraftgesetz, das sich in der Größe und Richtung der Strecken A_kB_k ausspricht.

Diese Bemerkung wird später noch von großer Wichtigkeit sein.

4. BERECHNUNG DER GESCHWINDIGKEIT UND BESCHLEUNIGUNG BEI GEGEBENER BAHN.

In Figur 7 sei $AB = \Delta s$ ein Bahnelement, das in der Zeit Δt durchlaufen wird. O sei der Anfangspunkt eines Polarkoordinatensystems und $OA = r$. Wir machen $OC = OA$ und nennen $CB = \Delta r$. Ist $\sphericalangle AOC$ in Bogenmaß $= \Delta v$, so wird der Bogen $AC = r \cdot \Delta v$. Weil das Bogenelement AC auf dem Radius senkrecht steht, ist ΔABC bei C rechtwinklig. Es ist also

$$\Delta s^2 = (r \Delta v)^2 + \Delta r^2,$$

oder nach Division mit Δt^2 und nach dem Grenzübergang:

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = u^2 = \left(r\,\frac{dv}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dr}{dt}\right)^2. \qquad (1)$$

Fig. 7.

Um einen Ausdruck für die Beschleunigung aufzustellen, müssen wir den Punkt durch zwei Zeitelemente verfolgen. Es sei (Fig. 8):

$$AB = \Delta s \quad \text{und} \quad BC = \Delta s_1.$$

Wir erhalten die geometrische Differenz beider Wegelemente, indem wir $CD \# BA$ antragen. Dann ist:

$$BD = BC - DC = BC - AB.$$

Oder

$$BD = \Delta s_1 - \Delta s.$$

Nun ist

$$\Delta s = \left(\frac{\Delta s}{\Delta t}\right) \cdot \Delta t,$$

und wenn man $\frac{\Delta s}{\Delta t} = u$ setzt, kann man schreiben:

$$\Delta s = u \cdot \Delta t.$$

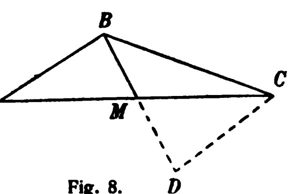


Fig. 8.

Im zweiten Zeitelement ist die Geschwindigkeit um Δu gewachsen, also

$$\Delta s_1 = (u + \Delta u) \cdot \Delta t.$$

Folglich:

$$BD = (u + \Delta u) \cdot \Delta t - u \cdot \Delta t = \Delta u \cdot \Delta t \ldots$$

Nun bilden aber die Punkte $ABCD$ die Ecken eines Parallelogramms, so daß $BD = 2 \cdot BM$ ist.

Diesen Wert setzt man in die letzte Gleichung ein, dividiert alles durch Δt^2 und erhält

$$\frac{\Delta u}{\Delta t} = \frac{2 \cdot BM}{\Delta t^2}. \tag{2}$$

Dieser Ausdruck bestimmt die mittlere Beschleunigung nach Größe und Richtung, denn die Größe und Richtung von BM ist ja bekannt. Wenn man den Grenzübergang für beliebig kleine Werte Δt macht, so liefert (2) die Beschleunigung $\frac{du}{dt}$ für die Zeit t.

Wir benutzen jetzt (2), um die Beschleunigung bei der gleichförmigen Kreisbewegung zu berechnen. Ein Punkt beschreibe um den Mittelpunkt O (Fig. 9) mit konstanter Winkelgeschwindigkeit einen Kreis vom Radius a.

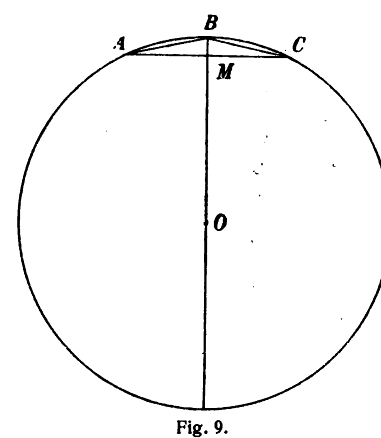


Fig. 9.

Die Wegelemente AB und BC sind also einander gleich. Es ist

$$BM = \frac{AB^2}{2a},$$

und da $AB = u \cdot \Delta t$, so wird die Beschleunigung:

$$\frac{2MB}{\Delta t^2} = \frac{u^2 \Delta t^2}{a \Delta t^2} = \frac{u^2}{a}. \tag{3}$$

Da wir u als konstant voraussetzen, so ist also die Beschleunigung konstant und nach dem Mittelpunkt gerichtet, denn BM zeigt immer gegen das Zentrum des Kreises. Man bezeichnet sie daher als eine *zentripetale* Beschleunigung. Durch Einführung der Winkelgeschwindigkeit kann man (3) noch etwas umformen.

Ein Punkt des Radius, welcher vom Mittelpunkt den Abstand 1 hat, möge in der Zeiteinheit den Bogen n beschreiben; n ist dann die *Winkelgeschwindigkeit* im Bogenmaß, und es wird $u = n \cdot a$.

Folglich erhält man für die *zentripetale Beschleunigung*

$$n^2 a. \qquad (4)$$

Da dieselbe den Abstand vom Mittelpunkte zu verkleinern sucht, gibt man ihr bei manchen Rechnungen das negative Vorzeichen.

Die Erde erteilt infolge ihrer Achsendrehung allen Gegenständen eine zentrifugale Beschleunigung, zu deren Berechnung wir zuerst die allen Punkten der Erde gemeinsame Winkelgeschwindigkeit n in einer Sekunde mittlerer Zeit (Nr. 10) bestimmen. Da die Erde zu einer Umdrehung 86164 mittlere Sekunden braucht, so ist

$$n = \frac{2\pi}{86164} = 0{,}00007292.$$

Setzen wir den Äquatorradius

$$a = 6378000 \text{ m},$$

so erhält ein Körper auf dem Äquator die zentrifugale Beschleunigung:

$$n^2 \cdot a = 0{,}034 \text{ m/sec}^2.$$

An einem Orte P (Fig. 10) unter der geographischen Breite φ, der von der Erdachse den Abstand ρ hat, ist die zentrifugale Beschleunigung

$$n^2 \rho = PB.$$

Wollen wir die Komponente in der Richtung der Schwere, also senkrecht zur Meridiantangente, erhalten, so müssen wir die Projektion

$$PB_1 = PB \cos\varphi = n^2 \rho \cos\varphi$$

berechnen. Für $\varphi = 45^0$ ist

$$\rho = 4518000 \text{ m}$$

und

$$PB_1 = 0{,}017 \text{ m/sec}^2. \qquad (\alpha)$$

Unter 45^0 Breite erfährt ein Pendel die vertikal nach unten gerichtete Beschleunigung

$$9{,}806 \text{ m/sec}^2. \qquad (\beta)$$

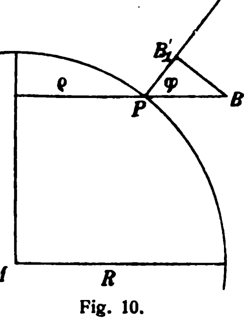


Fig. 10.

Würde die Erde sich nicht drehen, so wäre diese Zahl um den Betrag der zentrifugalen Beschleunigung größer. Die

Beschleunigung durch die Erdschwere allein ist also für $\varphi = 45^0$ die Summe der Zahlen (α) und (β), nämlich rund

$$9{,}82 \text{ m/sec}^2.$$

5. ÜBER BEWEGUNGEN, BEI DENEN EINE ZENTRALKRAFT WIRKT.

Wenn die Beschleunigung stets nach demselben Punkte, einem *Zentrum*, gerichtet ist, so sagt man, die Bewegung werde von einer *Zentralkraft* bewirkt. Ein Beispiel für eine derartige Bewegung war die gleichförmige Kreisbewegung. Man pflegt das Zentrum zum Nullpunkt eines Polarkoordinatensystems zu machen und nennt den beweglichen Radius, der vom Zentrum ausgeht, den Radius-Vektor. Die Maßzahl der vom Radius-Vektor in der Zeiteinheit bestrichene Fläche nennt man auch die *Flächengeschwindigkeit* des Radius. Wir beweisen zunächst den Satz:

Bei konstanter Flächengeschwindigkeit (d. h. wenn der Radius in gleichen Zeiten gleiche Flächen bestreicht) fällt die Beschleunigung in die Richtung des Radius-Vektor.

Beweis. (Fig. 11.) In zwei aufeinanderfolgenden Zeitelementen werden die Strecken AB und BC zurückgelegt. Die Dreiecke OAB und OBC werden als flächengleich vorausgesetzt. Daher haben A und C von der gemeinsamen Grundlinie OB gleiche Abstände. Zieht man also $AD \parallel BC$ und verbindet C mit D, so muß ein Parallelogramm entstehen. Hierin ist die geometrische Differenz

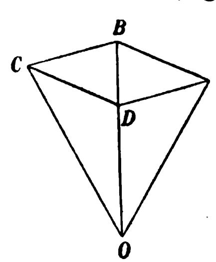


Fig. 11.

$$BD = AD - AB = BC - AB.$$

Die letzte Differenz bedeutet aber die Differenz der Geschwindigkeiten, d. h. die Beschleunigung, die somit in die Richtung des Radius BO fällt.

An derselben Figur beweist man auch leicht den umgekehrten Satz: Wenn ein Punkt von einer Zentralkraft angetrieben wird, d. h. wenn die Beschleunigung in den Radius-Vektor fällt, so ist die Flächengeschwindigkeit des Radius konstant.

Wir gehen nun dazu über, einen algebraischen Ausdruck für die zentrale Beschleunigung aufzustellen. Ein Punkt lege in der Zeit Δt das Kurvenelement AB (Fig. 7) zurück. Die Beschleunigung R wirkt längs des Radius-Vektor AO und BO. Wie früher setzen wir die Bewegung zusammen aus einer solchen auf dem Kreisbogen AC und einer zweiten BC auf dem Radius. Die zweite Bewegung ist eine geradlinige und ihre Beschleunigung nach erfolgtem Grenzübergang einfach $\frac{d^2r}{dt^2}$. Zu dieser addiert sich die von der Kreisbewegung herrührende radiale Beschleunigung, die nach Nr. 4 (4) $= -r\left(\frac{dv}{dt}\right)^2$ ist, wenn $n = \frac{dv}{dt}$ gesetzt wird; das negative Zeichen muß genommen werden, weil $\frac{d^2r}{dt^2}$ nach der entgegengesetzten Seite gerichtet ist. Die gesuchte Beschleunigung im Radius-Vektor ist also

$$R = \frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{dv}{dt}\right)^2.$$

II. ABSCHNITT.

BESCHREIBUNG DER BAHNEN IM SONNENSYSTEM UND RÜCKSCHLUSS AUF DIE WIRKENDEN KRÄFTE.

6. DIE KEPLERSCHEN GESETZE.

Nachdem Coppernicus der Sonne die zentrale Stellung im Planetensystem angewiesen hatte, war es Kepler (1571 bis 1630), der zum ersten Male auf Grund sorgfältiger Beobachtungen, die zum größten Teil von Tycho de Brahe gemacht worden waren, die richtigen Gesetze für die Planetenbewegung aussprach. Er legte seine Erkenntnis in folgenden drei fundamentalen Sätzen nieder, auf die er zunächst durch das Studium der Marsbewegung gekommen war, deren allgemeine Gültigkeit er aber bald erkannt hatte:

1. Jeder Planet beschreibt eine Ellipse, in deren einem Brennpunkte die Sonne steht.

2. Der von der Sonne nach dem Planeten gezo-

gene Radius-Vektor bestreicht in gleichen Zeiten gleiche Flächen. (*Flächensatz.*)

Anmerkung. Hierbei ist zu beachten, daß die beiden Sektoren, die die Radien zweier Planeten in gleichen Zeiten überstreichen, einander nicht gleich sind. Über das Verhältnis solcher Sektoren vgl. Nr. 12 (2).

3. Die Quadrate der Umlaufszeiten zweier Planeten verhalten sich wie die Kuben der halben großen Achsen ihrer Bahnen.

Man setzt im Wortlaut des dritten Gesetzes oft *mittlere Entfernung* für *halbe große Achse*, weil diese das arithmetische Mittel zwischen der größten und kleinsten Entfernung ist.

7. FOLGERUNGEN AUS DEM ERSTEN KEPLERSCHEN GESETZE.

Da die Sonne im Brennpunkte der Ellipsen steht, so wählt man zur Darstellung der Bahn die Polargleichung, bezogen auf den Brennpunkt als Anfangspunkt. Dieselbe lautet:

$$\frac{p}{r} = 1 + e \cos v.$$

Hierin bedeutet e die numerische Exzentrizität, ist also bei der Ellipse < 1. Über die Bedeutung der anderen Größen kann kein Zweifel bestehen. Für $v = 0^0$ befindet sich der Planet in der Sonnennähe oder dem *Perihel*, Π in Fig. 12; für $v = 180^0$ in der Sonnenferne A, im *Aphel.* $\Pi A = 2a$ ist die große Achse der Bahn und wird, soweit ihre Richtung und nicht ihre Länge in Betracht kommt, die *Apsidenlinie* genannt, weil die Punkte A und Π auch die *Apsiden* heißen. Der im Brennpunkte S auf $A\Pi$ senkrecht stehende Radius p heißt der *Parameter der Bahn;* aus der Geometrie ist bekannt, daß

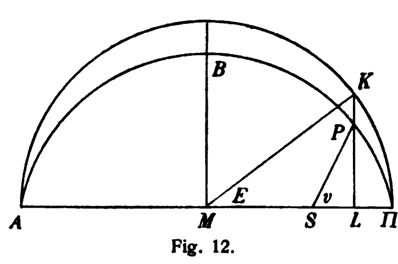


Fig. 12.

$$p = a(1 - e^2),$$

und daß der Abstand

Brennpunkt-Mittelpunkt $MS = ae$

ist. Der Polarwinkel v zwischen dem Radius SP und der Richtung $S\Pi$ heißt in der Astronomie die *wahre Anomalie* des Planeten und wird von 0^0 bis 360^0 gerechnet. Man fällt jetzt vom Planetenorte P das Lot PL auf die große Achse und verlängert es nach rückwärts, bis es den um M mit dem Radius a geschlagenen Kreis in K schneidet. Verbindet man K mit M, so entsteht ein Winkel $KM\Pi$, der die *exzentrische Anomalie* E genannt wird, weil er vom Zentrum aus (ex centro) gebildet ist. Dieser Winkel spielt in der Astronomie eine große Rolle, und wir wollen deshalb zunächst zeigen, in welcher Beziehung E zu den Polarkoordinaten r und v steht.

Es ist

$$SL = ML - MS.$$

Betrachtet man hier SL als die Projektion von r auf die Achse und ML als die Projektion des Kreisradius a, so kann man schreiben:

$$r \cos v = a \cos E - ae. \tag{1}$$

Hiermit vergleichen wir den Wert von $r \cos v$, der sich aus der Polargleichung ergibt, nämlich

$$r \cos v = \frac{p - r}{e}.$$

Durch Gleichsetzen beider Werte erhält man

$$p - r = ae \cos E - ae^2$$

oder

$$r = p + ae^2 - ae \cos E.$$

Setzt man hier $p = a(1 - e^2)$, so wird

$$r = a - ae \cos E. \tag{2}$$

Man bekommt durch Addition von (1) und (2):

$$r(1 + \cos v) = a(1 - e)(1 + \cos E), \tag{3}$$

und durch Subtraktion von (1) und (2):

$$r(1 - \cos v) = a(1 + e)(1 - \cos E). \tag{4}$$

Die Faktoren, welche v und E enthalten, formt man um mit Hilfe der Identitäten:

$$1 + \cos a = 2\cos^2\frac{\alpha}{2} \quad \text{und} \quad 1 - \cos a = 2\sin^2\frac{\alpha}{2}.$$

(3) und (4) liefern dann durch Division und Ausziehen der Quadratwurzel:

$$\tan\frac{v}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\cdot\tan\frac{E}{2}. \tag{5}$$

Multipliziert man dagegen die beiden Gleichungen und zieht die Wurzel, so ergibt sich:

$$r\sin v = a\sqrt{1-e^2}\sin E. \tag{6}$$

Für astronomische Rechnungen ist es oft zweckmäßig, den durch die Gleichung $e = \sin\varphi$ definierten Exzentrizitätswinkel φ einzuführen. Seine geometrische Bedeutung erhält man, wenn man einen Endpunkt B der kleinen Achse mit S verbindet. Dann ist $BS = a$, also

$$\sin MBS = \frac{ae}{a} = e,$$

folglich $\sphericalangle MBS = \varphi$. Mit diesem Winkel φ nehmen die Gleichungen (1) und (6) die Gestalt an:

$$\left.\begin{aligned} r\cos v &= a(\cos E - \sin\varphi) \\ r\sin v &= a\cos\varphi\sin E \end{aligned}\right\}. \tag{7}$$

Die Form der Bahnellipse ist durch a und e oder a und φ bestimmt. Will man nun den Ort eines Planeten in seiner Bahn, also seine Polarkoordinaten r und v, für eine bestimmte Zeit t berechnen, so muß man den Betrag der exzentrischen Anomalie E für diese Zeit kennen. In der nächsten Nummer werden wir sehen, wie man E berechnen kann. Die Gleichungen (7) dienen dann zur Berechnung von r und v aus a, φ und E, und zwar ist der Quadrant von v durch sin und cos eindeutig festgelegt.

8. FOLGERUNGEN AUS DEM ZWEITEN KEPLERSCHEN GESETZE.

Wir wollen zwei Sektoren vergleichen, die der Radius-Vektor eines Planeten in der Sonnennähe und Sonnenferne bestreicht. Wir nehmen die Zwischenzeiten einander gleich und so klein an, daß der Sektor mit genügender Annäherung

als Dreieck betrachtet werden kann. Konstruiert man die Höhen dieser flächengleichen Dreiecke von der Sonne aus, so ist sofort klar, daß die Grundlinie des ersten Dreiecks die größere sein muß, d. h. daß die Geschwindigkeit des Planeten in der Sonnennähe größer ist als in der Sonnenferne.

Wir nennen die Umlaufszeit des Planeten U, in dieser Zeit bestreicht also der Radius einmal die Ellipsenfläche F. Die Zeit, die der Planet vom Perihel Π (Fig. 12) bis zur Stelle P braucht, heiße t; die bestrichene Fläche ist ΠSP. Das zweite Keplersche Gesetz sagt nun, daß folgende Proportion bestehe:

$$U : t = F : \Pi SP.$$

Den Kreis mit dem Mittelpunkt M und dem Radius a dreht man jetzt um den Durchmesser $A\Pi$ aus der Zeichenebene heraus, bis die Ellipse als seine senkrechte Projektion erscheint. Dies tritt ein, wenn K senkrecht über P liegt. Die Fläche F ist dann die Projektion der Kreisfläche $a^2\pi$, und ΠSP ist die Projektion von ΠSK. Zwischen den eben genannten Flächen des Kreises besteht dasselbe Größenverhältnis wie zwischen ihren Projektionen, also ist:

$$F : \Pi SP = a^2\pi : \Pi SK.$$

Wir können für die erste Proportion jetzt schreiben:

$$U : t = a^2\pi : \Pi SK.$$

Nach der Figur ist aber

$$\Pi SK = \Pi MK - SMK$$

oder

$$\Pi SK = \tfrac{1}{2} MK \cdot \widehat{K\Pi} - \tfrac{1}{2} SM \cdot KL.$$

Ist E in Bogenmaß der Winkel ΠMK, so ist der Bogen $\widehat{K\Pi} = aE$, folglich

$$\Pi SK = \frac{1}{2} a \cdot aE - \frac{1}{2} ae \cdot a \sin E = \frac{a^2}{2}(E - e \sin E).$$

Setzt man dies in die letzte Proportion ein, so erhält man nach einer kleinen Umstellung:

$$\frac{2\pi}{U} \cdot t = E - e \sin E.$$

Wir denken uns nun, daß sich um die Sonne ein Radius von der Länge 1 mit gleichförmiger Geschwindigkeit in U Tagen herumdrehe, wobei also sein Endpunkt den Bogen 2π beschreibt. In einem Tage wird der Endpunkt des Radius dann den Bogen $\frac{2\pi}{U}$ beschreiben. Das ist der in Bogenmaß gemessene Winkel, den ein Planet an einem Tage beschreiben würde, wenn er mit gleichförmiger Winkelgeschwindigkeit seinen Umlauf in U Tagen vollendete. Man nennt den Winkel $\frac{2\pi}{U} = n$ die *mittlere tägliche Bewegung* des Planeten, weil n ein Durchschnitts- oder Mittelwert der täglichen Bewegung ist.

Befindet sich der gedachte Planet zur Zeit $t = 0$ im Perihel, so hat er nach t Tagen einen Winkel $nt = M$ zurückgelegt, der seine *mittlere Anomalie* zur Zeit t heißt. Die letzte Gleichung nimmt damit die Form an:

$$E - e \sin E = M \text{ (Keplersche Gleichung).}$$

Will man wissen, zu welcher Zeit ein Planet einen bestimmten Ort (r, v) seiner Bahn erreicht, so hat man also aus den Gleichungen (7) der vorigen Nummer $\cos E$ und $\sin E$ zu berechnen, wodurch E genau bestimmt ist. Hierauf findet man t aus der Keplerschen Gleichung, die man schreibt:

$$t = \frac{E - e \sin E}{n}.$$

Bei der sogenannten *Ephemeridenrechnung* liegt die schwierigere Aufgabe vor, den Ort des Planeten für eine vorgeschriebene Zeit zu berechnen. Man versteht unter einer Planetenephemeride eine Tafel, die die Örter eines Planeten in gewissen, konstanten Zeitintervallen enthält. Bei Aufstellung einer Ephemeride ist t bekannt, die Unbekannte der Keplerschen Gleichung ist E. Da diese Gleichung in bezug auf E sich nicht in geschlossener Form auflösen läßt[1]), so kann man E nur durch ein Näherungsverfahren bestimmen, wofür die Astronomen verschiedene elegante Methoden ausgearbeitet haben. Ist E bekannt geworden, so erhält man aus (7) den Ort (r, v) für die gewünschte Zeit.

1) Die Auflösung kann nur durch Reihenentwicklung geschehen.

Die vorher eingeführte Größe U heißt die *siderische Umlaufszeit* (von sidus = Gestirn), weil nach dieser Zeit der Planet, von der Sonne gesehen (heliozentrisch), unter den Fixsternen wieder dieselbe Stellung hat. Für die Erde ist z. B.

$$U = 365{,}256 \text{ Tage},$$

also ihre mittlere tägliche Bewegung

$$n = \frac{360 \cdot 60 \cdot 60}{365{,}256} \text{ Bogensekunden} = 3548'',19.$$

Beim Jupiter haben wir

$$U_1 = 4332{,}588 \text{ Tage},$$

folglich

$$n_1 = \left(\frac{360 \cdot 60 \cdot 60}{4332{,}588}\right)'' = 299'',13.$$

9. LAGE DER BAHN IM RAUME.

Bisher sind wir erst imstande, die Stellung eines Planeten innerhalb seiner Bahnebene anzugeben. Nun liegen aber die Bahnen der Planeten in verschiedenen Ebenen, und die Apsidenlinien haben verschiedene Richtungen. Wir müssen also sehen, wie man die Lage der Ebene und der Apsidenlinie bestimmen kann. Zu diesem Zwecke denkt man sich um die Sonne eine Kugel mit beliebigem Radius geschlagen; meist nimmt man die sogenannte Himmelskugel, auf welche man die Fixsterne projiziert. Die Bahnebene eines Planeten schneidet die Kugel in einem größten Kreise; derjenige Kreis, in welchem die Kugel von der Ebene der Erdbahn geschnitten wird, heißt die *Ekliptik*, worunter man auch die ganze Ebene versteht. Die Ekliptik ist zugleich die scheinbare Bahn, welche die Sonne in einem Jahre durchläuft. Bei Frühlingsanfang geht die Sonne im *Widder-* oder *Frühlingspunkt* ♈ durch den Äquator, wobei sie auf die nördliche Himmelskugel tritt.

In Fig. 13 sei E der auf die Himmelskugel von der Sonne aus projizierte Erdort, E♈ die Ekliptik und KP ein Teil einer anderen Planetenbahn, ebenfalls von der Sonne aus projiziert. Der Pfeil gibt die Bewegungsrichtung von Erde und Planet an; dabei ist in der Figur angenommen, daß sich der

Beschauer im Innern der Kugel befindet. Die Ekliptik teilt die Kugel in zwei Hälften, von denen diejenige die nördliche heißt, welche den Nordpol des Äquators enthält. In der Zeichnung soll die obere Halbkugel die nördliche sein, so daß der Planet bei K von der südlichen auf die nördliche Seite der Ekliptik tritt. K heißt der *aufsteigende Knoten* der Planetenbahn auf der Ekliptik. Im Gegenpunkt von K, dem *absteigenden Knoten*, geht der Planet durch die Ekliptik auf die südliche Halbkugel über. Der Winkel einer Bahnebene mit der Ekliptik, $i = EKP$, heißt die *Neigung der Bahn*. Unter den großen Planeten hat Merkur mit 7^0 die stärkste Neigung, dagegen sind die Neigungen der kleinen Planeten zum Teil viel beträchtlicher, bei Pallas ist i sogar fast 35^0.

Die Winkel, die man auf der Ekliptik in der Richtung der Sonnen-(Erd-)bewegung zählt, heißen *Längen*, die senkrechten Winkelabstände, von der Ekliptik nach ihren Polen hin gerechnet, sind die *Breiten*. Der Frühlingspunkt ist der Anfangspunkt der Längen, der Bogen $K\Upsilon = \Omega$ ist die *Länge des aufsteigenden Knotens*. Die Länge des absteigenden Knotens ist um 180^0 verschieden von Ω. Die räumliche Lage der Bahnebene eines Planeten ist durch i und Ω vollständig bestimmt. Es fehlt nur noch eine Angabe über die Lage der Apsidenlinie innerhalb dieser Ebene. Bei der Erde läßt sich die Lage der großen Achse besonders leicht beschreiben: Wir projizieren das Perihel nach der Stelle Π der Ekliptik und messen den Bogen $\Upsilon\Pi$, welcher die *Länge des Perihels* heißt.

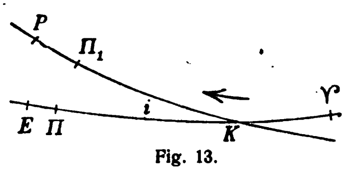


Fig. 13.

Ist dagegen Π_1 das Perihel der Bahn PK, so wird $K\Pi_1$ der *Abstand des Perihels vom Knoten*, und der gebrochene Bogen $\Upsilon K + K\Pi_1$ die *Länge des Perihels* genannt. Die Richtung der Apsidenlinie, d. h. der Punkt Π_1, ist demnach bekannt, wenn zwei der folgenden drei Größen gegeben sind:

die Länge des aufsteigenden Knotens ΥK,

der Abstand des Perihels vom Knoten $K\Pi_1$

und die Länge des Perihels $\Upsilon K\Pi_1$.

Den **Ort** des Planeten in der Bahn bezieht man ebenfalls meistens auf den Frühlingspunkt. Steht der Planet in P, so ist $\Pi_1 P = v$ seine wahre Anomalie; der gebrochene Bogen $\Upsilon K \Pi_1 + v$ heißt die *wahre Länge des Planeten in der Bahn.* Insbesondere erhält man für die *wahre Länge der Erde* $\Upsilon\Pi + \Pi E = \Upsilon E$. Es sei (Fig. 14) S die Sonne, der innere Kreis die Bahn der Erde E und der äußere die Schnittlinie der Ekliptik mit einer um die Sonne gelegten Kugelfläche. Heliozentrisch (von der Sonne gesehen) sei die Länge der Erde $\Upsilon E' = \lambda$, dann ist geozentrisch (von der Erde gesehen) die Länge der Sonne gleich dem Bogen $\Upsilon E' S' = 180^0 + \lambda$. Also ist die (geozentrische) Länge der Sonne immer um 180^0 größer als die (heliozentrische) Länge der Erde.

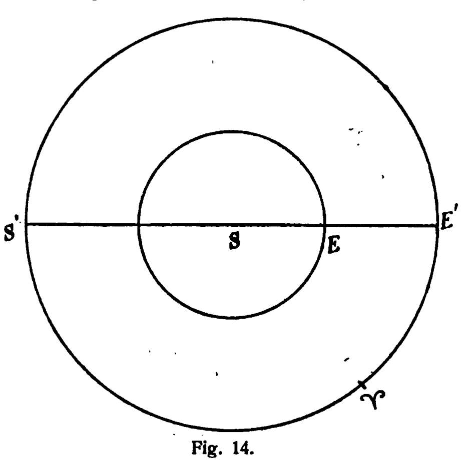


Fig. 14.

In den Sonnentafeln der astronomischen und nautischen Jahrbücher findet man die Länge der Sonne von Tag zu Tag tabuliert. Aus diesen Zahlen erhält man sofort die Erdlänge, indem man 180^0 abzieht. Setzt man z. B. die Länge der Sonne $= 360^0$, wenn dieselbe durch den Frühlingspunkt geht, so hat die Erde in diesem Augenblick die heliozentrische Länge 180^0.

In *Konjunktion* mit der Sonne steht ein Planet, der dieselbe geozentrische Länge hat wie die Sonne; er ist mit der Sonne in *Opposition*, wenn die geozentrischen Längen um 180^0 verschieden, also die heliozentrischen Längen gleich sind. Bedeutet in Figur 14 der äußere Kreis eine Planetenbahn, so ist der Planet bei S' in Konjunktion, bei E' in Opposition mit der Sonne. Da beide Bahnen aber nicht in einer Ebene liegen, so ist $S'SEE'$ keine gerade Linie. Bei den

inneren Planeten Merkur und Venus gibt es keine Opposition, man hat aber eine *obere* und *untere Konjunktion* zu unterscheiden, je nachdem diese Planeten von uns aus gesehen hinter oder vor der Sonne vorbeigehen.

Addiert man in Figur 13 zu dem Bogen $\Upsilon K \Pi_1$ (= Abstand des Perihels vom Knoten) die mittlere Anomalie M des Planeten, so erhält man seine *mittlere Länge*. Da diese von der wahren Länge niemals sehr weit verschieden ist, so sind zur Zeit der Opposition oder der unteren Konjunktion die heliozentrischen mittleren Länge von Erde und Planet nahezu gleich. Nun bezeichnet man als *synodische Umlaufszeit* eines Planeten die Zeit zwischen zwei Momenten, in denen die Erde und der betreffende Planet gleiche mittlere Länge haben. Nach dem eben Gesagten kann die synodische Umlaufszeit nicht sehr von der Zwischenzeit zweier aufeinander folgenden Oppositionen oder gleichnamigen Konjunktionen abweichen. Darum muß man die synodische Umlaufszeit kennen, wenn man die Zeit einer Opposition angenähert berechnen will.

Da die mittlere Anomalie täglich um den Betrag n wächst, so nimmt die mittlere Länge täglich um denselben Winkel zu. Gehen wir von einer Stellung aus, bei der ein Planet dieselbe mittlere Länge hat wie die Erde, so ist nach einem Tage die Längendifferenz gleich dem Unterschiede der mittleren täglichen Bewegungen n (der Erde) und n_1 (des Planeten), also gleich

$$n - n_1, \text{ wenn } n > n_1 \text{ (äußerer Planet),}$$

oder gleich $n_1 - n$, wenn $n < n_1$ (innerer Planet) ist.

Die mittleren Längen stimmen also wieder überein, wenn diese Differenz zu 360^0 angewachsen ist. Sonach dauert die synodische Umlaufzeit

$$\left(\frac{360 \cdot 60 \cdot 60}{n - n_1}\right) \text{ Tage bzw. } \left(\frac{360 \cdot 60 \cdot 60}{n_1 - n}\right) \text{ Tage.}$$

Nach Nr. 8 betrug für die Erde

$$n = 3548,''19$$

und für den Jupiter

$$n_1 = 299,''13.$$

Hiermit ergibt sich als synodische Umlaufszeit des Jupiter

$$\frac{1296000}{3249{,}06}\ \text{Tage} = 1\ \text{Jahr}\ 33\ \text{Tage}\ 15\ \text{Stunden},$$

wobei 1 Jahr = 365,25 Tage gerechnet ist. Die Venus hat eine mittlere tägliche Bewegung von 5767,″67, folglich ist ihre synodische Umlaufszeit:

$$\frac{1296000}{2219{,}48}\ \text{Tage} = 1\ \text{Jahr}\ 218\ \text{Tage}\ 16\ \text{Stunden}.$$

Am 31. Dezember 1899 um 12^h Mittag (Berliner Zeit) war die

mittlere Länge der Erde $(\Upsilon\Pi + M) = \ \ 99^0 39' 36''$,

die Länge ihres Perihels $\Upsilon\Pi = 101^0 13' 15''$;

also ihre mittlere Anomalie $M = -\ 1^0 33' 39''$.

Um diesen Betrag befand sich die Erde also vor ihrem Perihel. Da die mittlere Anomalie täglich um etwa 59′ wächst, so hatte die Erde das Perihel nach etwas mehr als $1\frac{1}{2}$ Tagen, also nach Beginn des 2. Januar erreicht.

10. ZEITRECHNUNG.

DEFINITION DER ZEITEINHEITEN. DIE ZEITGLEICHUNG.[1]

Wir können Zeiten nur durch Bewegungen messen. Nachdem die Bewegung eines bestimmten Punktes als Normalzeitmaß angenommen ist, nennen wir zwei Zeitabschnitte gleich, wenn dieser Punkt in ihnen gleich lange Wege zurückgelegt hat. Als Normalbewegung hat man die Erdrotation gewählt; die Zeit, in welcher die Erde eine volle Umdrehung von 360^0 um ihre Achse ausführt, ist auch die Zeit, in der ein Fixstern einen vollen Kreis am Himmel beschreibt; sie wird deshalb ein *Sterntag* genannt und in 24^h *Sternzeit* eingeteilt. An der Erdrotation als Vergleichsbewegung prüfen wir alle anderen Bewegungen dahin, ob sie gleichförmig erfolgen oder nicht. Daß wir gerade die Erdrotation zur Normalbewegung machen, ist vom rein logischen Standpunkte

1) Vgl. Weber-Wellsteins „Encyklopädie der Elementar-Mathematik“ Bd. III, 2. Teil, § 89–90, bearbeitet von Bauschinger. [Teubner 1912.]

eine Willkür und im Grunde aus Zweckmäßigkeitsrücksichten geschehen, wie aus H. Poincarés Darstellung im „Wert der Wissenschaft“ [Teubner 1906] hervorgeht.[1])

Für das bürgerliche Leben ist der Sterntag als Zeiteinheit nicht brauchbar, weil die Sonne eine eigene Bewegung unter den Sternen hat und dadurch der Mittag eines Ortes jeden Tag auf eine andere Sternzeitstunde fällt. Eine Zeitrechnung für die Bedürfnisse des praktischen Lebens muß sich demnach auf den Sonnenlauf, also auf die fortschreitende Bewegung der Erde im Verein mit ihrer Rotation gründen. Es liegt nahe, als bürgerliche Zeiteinheit einen „Sonnentag“ zu wählen, worunter die Zeit zwischen zwei aufeinanderfolgenden Sonnenkulminationen zu verstehen wäre. Wir werden aber im folgenden sehen, daß ein so definierter Tag nicht konstante Länge hat: wir sind also genötigt, nach einer anderen Definition zu suchen, und greifen zu diesem Zwecke zurück auf die Gleichung (5) in Nr. 7 und auf die Keplersche Gleichung in Nr. 8 S. 16.

Man erkennt aus diesen Gleichungen zunächst, daß v, E und M gleichzeitig 0^0 und 180^0 betragen; wenn also der Planet durchs Perihel oder Aphel geht, passiert auch der gedachte Planet, dessen mittlere tägliche[2]) Bewegung n war (vgl. Nr. 8), die Apsidenlinie. Da der wahre Planet im Perihel schneller, im Aphel langsamer läuft (Nr. 8), und da er im zweiten Falle eine größere Entfernung von der Sonne hat, so sind zwei Gründe vorhanden, welche den im Laufe eines Tages durchmessenen Ellipsenbogen von der Sonne aus kleiner erscheinen lassen, wenn der Planet im Aphel steht, als wenn er im Perihel ist. Oder mit anderen Worten: Der tägliche Zuwachs Δv der wahren Anomalie ist im Perihel am größten, nimmt ab bis zum Aphel und wächst dann wieder auf dem Rückwege zum Perihel. Da nun der ge-

---

1) Im selben Sinne äußert sich auch Rudolf H. Weber in dem sehr lesenswerten Abschnitte über die Zeit in Weber-Wellsteins „Encyklopädie der Elementar-Mathematik“ Bd. III, 1. Teil § 17. [Teubner 1910.]

2) Da vorläufig der Sterntag das einzige konstante Zeitmaß ist, das wir definiert haben, so kann man die Umlaufszeit U und die Größe $n = \frac{2\pi}{U}$ als bezogen auf den Sterntag annehmen.

dachte Planet mit gleichförmiger Winkelgeschwindigkeit um die Sonne läuft, so muß er auf dem Wege vom Perihel zum Aphel hinter dem wahren Planeten zurückbleiben, ihn beim Aphel einholen und ihm auf der zweiten Hälfte der Bahn voraneilen, bis er beim Perihel vom wahren Planeten wieder eingeholt wird. Setzt man

$$M + \Delta M = v,$$

so bedeutet ΔM den Winkel, um den der gedachte Planet in der ersten Hälfte der Bahn hinter dem wahren Planeten zurück ist; für die zweite Hälfte ist dann ΔM negativ zu nehmen. Dies Glied ΔM heißt die *Mittelpunktsgleichung.*[1]) Um sie zu berechnen, kann man so verfahren, daß man mit Hilfe von (5) in Nr. 7 und mit der Keplerschen Gleichung die Winkel v und M von Tag zu Tag berechnet und dann einfach ihre Differenz $v - M = \Delta M$ bildet. Man erhält auf diese Weise eine Tafel, die für jeden Tag die Größe der Mittelpunktsgleichung angibt.

Im folgenden wollen wir uns unter dem Planeten die Erde denken.

Hat ihr Perihel die Länge Π (Bogen $\Upsilon\Pi$ in Figur 13), so ist zufolge der letzten Gleichung:

$$(\Pi + M) + \Delta M = (\Pi + v),$$

oder, wenn man die eingeklammerten Winkel l und λ nennt,

$$l + \Delta M = \lambda.$$

Nach Nr. 9 ist λ die *wahre Länge* der Erde in ihrer Bahn (Bogen $\Upsilon\Pi E$) und l die *mittlere Länge*, die man auch als Länge einer gedachten Erde deuten kann, die sich mit gleichförmiger Winkelgeschwindigkeit um die Sonne bewegt. Fügt man in der letzten Gleichung beiderseits 180^0 hinzu, so erhält man nach Nr. 9 die geozentrischen Sonnenlängen. Es bedeutet dann

$$180^0 + l = L$$

die Länge einer Sonne, die in einem Jahre mit der mittleren täglichen Bewegung n um die Erde zu laufen scheint und daher die *mittlere Sonne der Ekliptik* genannt wird.

1) Das Wort Gleichung wird hier wie in dem Worte Zeitgleichung in einem anderen Sinne als sonst gebraucht.

$$180^0 + \lambda = \Lambda$$

ist dagegen die Länge der wahren Sonne. Zwischen beiden Längen besteht also die Gleichung

$$L + \Delta M = \Lambda.$$

Da sich v nach dem zweiten Keplerschen Gesetze täglich um verschiedene Beträge ändert, oder – was auf dasselbe hinauskommt – da ΔM sich täglich ändert, so ist die tägliche Änderung der Sonnenlänge Λ eine variable Größe; die Sonne wandert im Verlaufe eines Tages bald um ein größeres, bald kleineres Stück auf der Ekliptik vorwärts, so daß die Zeit zwischen zwei Sonnenkulminationen nicht konstant sein kann. Man könnte versuchen, die mittlere Sonne der Ekliptik zur Definition einer konstanten Tageslänge nutzbar zu machen. Nun wächst zwar L auf der Ekliptik der Zeit proportional, wir messen aber die Stundenwinkel auf dem Äquator, müssen also L erst auf diesen projizieren, wobei es sich dann herausstellt, daß zu gleichen Schritten ΔL durchaus nicht immer gleiche Projektionen von ΔL gehören. So erhalten wir also immer noch kein brauchbares Zeitmaß.

Es sei (Fig. 15) ΥS ein Teil der Ekliptik und ΥS_1 ein Teil des Äquators; S sei die wahre Sonne, S_1 ihre Projektion auf den Äquator. S_1 kann man die wahre Sonne des Äquators nennen. Ferner ist $\Upsilon S = \Lambda$, $\Upsilon S_1 = A$ die Rektaszension der wahren Sonne, $\varepsilon = 23^0 27'$ die Schiefe der Ekliptik. Dann folgt aus dem sphärischen Dreieck $\Upsilon S S_1$

Fig. 15.

$$\tan A = \tan \Lambda \cdot \cos \varepsilon.$$

Mit Hilfe dieser Gleichung wird die Rektaszension der wahren Sonne berechnet. Jetzt läßt sich eine Tabelle aufstellen, die für die Werte von Λ von Grad zu Grad die zugehörigen Werte A enthält und dazu die Unterschiede $\Delta \Lambda$ zwischen dem Ausgangswert Λ und dem zugehörigen A, so daß

$$\Lambda + \Delta \Lambda = A$$

ist. In dieser Form erscheint $\Delta \Lambda$ als das Korrektionsglied,

das man zur Länge hinzufügen muß, um die Rektaszension zu erhalten. Man kann daher $\Delta \varLambda$ die *Reduktion auf den Äquator* nennen.

Bei den Tag- und Nachtgleichen und den Solstitien, nämlich bei

$$\varLambda = 0^0,\ 90^0,\ 180^0 \text{ und } 270^0$$

wird $\varLambda = A$ und folglich $\Delta \varLambda = 0$.

Dazwischen hat $\Delta \varLambda$ abwechselnd positives und negatives Vorzeichen.

Wir nehmen jetzt an, daß wir die Länge $\varLambda$ der wahren Sonne, welche in der Gleichung

$$\varLambda + \Delta \varLambda = A$$

vorkommt, aus der Gleichung

$$L + \Delta M = \varLambda$$

entnehmen, und erhalten durch Kombination beider Gleichungen:

$$L + \Delta M + \Delta \varLambda = A.$$

Diese Gleichung faßt die ganze Rechnung zusammen, wie man aus der Länge L der mittleren Sonne der Ekliptik durch Anbringung der Mittelpunktsgleichung ΔM die wahre Sonne der Ekliptik, und durch Hinzufügung der Reduktion auf den Äquator $\Delta \varLambda$ die wahre Sonne im Äquator erhält.

Wir definieren nun eine *mittlere Sonne des Äquators*, die sich mit gleichförmiger Geschwindigkeit im Äquator bewegen soll, und deren Rektaszension immer gleich der mittleren Länge L ist, welche auf der Ekliptik gezählt wurde. Die mittlere Sonne des Äquators legt also täglich auf dem Äquator den Bogen n zurück und trifft die mittlere Sonne der Ekliptik bei den Äquinoktialpunkten.

Die Zeit zwischen zwei aufeinanderfolgenden Kulminationen der mittleren Sonne des Äquators ist eine konstante Größe und heißt ein *mittlerer Sonnentag*, eingeteilt in 24 Stunden *mittlerer Zeit*. Dieser Tag ist nicht nur die bürgerliche Zeiteinheit, sondern liegt auch vielen astronomischen Angaben zugrunde, wie der Umlaufszeit und der mittleren täglichen Bewegung.

Im folgenden soll unter L die Rektaszension dieser mitt-

leren Sonne des Äquators verstanden werden. In Figur 16 sei $M\Upsilon$ der Äquator, M der Schnittpunkt desselben mit dem Meridian, S_w die wahre Sonne, S_m die eben definierte mittlere Sonne. Der Stundenwinkel der mittleren Sonne MS_m heißt die *mittlere Sonnenzeit*, der Stundenwinkel der wahren Sonne MS_w die *wahre Sonnenzeit*. Ferner ist $\Upsilon S_w = A$ und $\Upsilon S_m = L$. Die Differenz beider Stundenwinkel ist:

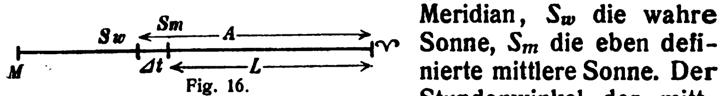


Fig. 16.

$$\Delta t = S_m S_w = A - L.$$

Nach dem Vorigen kann man hierfür schreiben:

$$\Delta t = \Delta M + \Delta \varLambda.$$

Diese Größe muß man also zur wahren Sonnenzeit (MS_w) hinzufügen, um die mittlere Sonnenzeit (MS_m) zu erhalten, nach der im bürgerlichen Leben gerechnet wird. Man nennt diese Korrektion der wahren Sonnenzeit die *Zeitgleichung*. Dieselbe erscheint hier als ein Winkel, den man auch sofort in Sternzeit verwandeln kann, da $360^0 = 24^h$ Sternzeit sind.[1]) Für die praktische Anwendung gibt man aber die Zeitgleichung in mittlerer Zeit an, wobei man bei der Umrechnung berücksichtigt, daß ein mittlerer Tag um nahezu 4 Minuten länger ist als ein Sterntag. Tabellen, welche die Zeitgleichung von Tag zu Tag enthalten, findet man z. B. im Berliner Jahrbuch, dem Nautical Almanac und dem Nautischen Jahrbuch.

Die Tafel am Schlusse des Bändchens stellt für das Jahr 1910 in anschaulicher Weise den Verlauf der Mittelpunktsgleichung ΔM, der Reduktion auf den Äquator $\Delta \varLambda$ und der Zeitgleichung $\Delta t = \Delta M + \Delta \varLambda$ dar.

Den stärksten Einfluß auf die Zeitgleichung hat das von der Neigung der Ekliptik herrührende Glied $\Delta \varLambda$, dessen Verlauf durch die schwarz ausgezogene Wellenlinie angegeben wird. Die extremen Werte und die Nullwerte von $\Delta \varLambda$ verteilen sich, wie folgt:

---

1) Man pflegt die Winkel auf dem Äquator immer in Sternzeit anzugeben.

Febr. 3.	$\Delta A = + 9^m,9$ [1]	Maxim.
März 21.	0	
Mai 6.	$- 9,9$	Minim.
Juni 22.	0	
Aug. 7.	$+ 9,9$	Maxim.
Sept. 23.	0	
Nov. 9.	$- 9,9$	Minim.
Dez. 22.	0.	

Die Werte ΔM werden durch die schwarz punktierte Kurve dargestellt.

Die ausgezeichneten Werte der Mittelpunktsgleichung sind folgende:

Jan. 2. (Perihel)	$\Delta M = 0$	
April 2.	$+ 7^m,7$	Maxim.
Juli 4. (Aphel)	0	
Okt. 4.	$- 7^m,7$	Minim.

Die beiden Teile dieser Kurve haben verschiedene Länge, weil der Sommer infolge der langsameren Bewegung der Erde länger ist als der Winter. (Auf der nördlichen Halbkugel.)

Addiert man die Ordinaten der beiden Kurven für ΔA und ΔM, so erhält man die Ordinaten der (roten) Kurve für die Zeitgleichung Δt mit folgenden ausgezeichneten Punkten:

Febr. 12.	$\Delta t = + 14^m,4$	Maxim.
April 16.	0	
Mai 15.	$- 3,8$	Minim.
Juni 15.	0	
Juli 27.	$+ 6,3$	Maxim.
Sept. 1.	0	
Nov. 3.	$- 16,3$	Minim.
Dez. 25.	0.	

Da, wie erwähnt, der positive Teil der ΔM-Kurve länger ist als der negative, so liegt das Minimum der Kurve dem letzten Minimum der ΔA-Kurve etwas näher als ihr Maximum dem ersten Maximum der ΔA-Kurve. Folglich ver-

---

1) Wenn die Beträge in dieser Weise abgerundet werden, so ist der Unterschied, ob man sie in Sternzeit oder in mittlerer Zeit angibt, noch nicht zu merken.

stärken sich die Minima noch mehr, als die Maxima es tun, was in den Werten der Zeitgleichung am 12. Febr. und 3. Nov. zum Ausdruck kommt.

Zusatz. Wenn man die Zeitgleichung aus der elliptischen Bewegung[1]) bis auf Sekunden genau berechnen will, muß man noch einen bisher unerwähnt gelassenen Umstand berücksichtigen: Wenn die Erde die Länge λ hat, ist nach der geometrischen Konstruktion die Sonnenlänge $\Lambda = 180^0 + \lambda$, und so haben wir bisher Λ stets angenommen. Dies ist aber nicht die Länge des Sonnenmittelpunktes, die man beobachtet, weil nach Nr. 2 infolge der *Aberration* des Lichtes der scheinbare Sonnenort um einige Bogensekunden von dem wahren Sonnenort differiert. Wäre diese Differenz konstant, so brauchten wir sie bei der Zeitrechnung nicht zu berücksichtigen. Nun ist uns aber die Sonne im Perihel um etwa 5000000 km näher als im Aphel, eine Strecke, zu der das Licht über 16 Sekunden braucht.

Rechnet man nun mit derjenigen Sonnenlänge, die man beobachtet, wenn die Erde eine mittlere Entfernung von der Sonne hat, so würde die Sonne im Perihel um 8^s zu früh, im Aphel um 8^s zu spät erscheinen, d. h. von der wahren Zeit sind im Perihel $8^s = 0^m,1$ zu subtrahieren, die Zeitgleichung ist also um diesen Betrag zu verkleinern. Im Aphel kämen noch $0^m,1$ zur Zeitgleichung hinzu, was bei unserer graphischen Darstellung ohne Einfluß auf die Gestalt der roten Kurve ist.

Bemerkung über die Rechnung mit Jahren. Vom astronomischen Standpunkte wäre es am einfachsten, das Jahr beginnen zu lassen, wenn die mittlere Sonne durch den Frühlingspunkt geht. Nehmen wir einen solchen Anfang an, so erhalten wir das *tropische Jahr*. Nun wandert aber der Frühlingspunkt auf der Ekliptik der Sonne jährlich um $50''$ entgegen (*Präzession der Tag- und Nachtgleichen*), daher steht die Sonne zu Beginn des neuen tropischen Jahres nicht genau an derselben Stelle wie ein Jahr zuvor. Den etwas längeren Zeitraum, der vergeht, bis die Sonne unter den Sternen wieder denselben Ort einnimmt, nennt man ein

1) Von den Störungen der elliptischen Bewegung (vgl. die letzte Nummer) sehen wir hier ab.

siderisches Jahr; das siderische Jahr hat 365,256 mittlere Tage, das tropische 365,242 mittlere Tage. Nur im tropischen Jahre fallen die Jahreszeiten immer wieder in dieselben Monate, und darum legt man es auch der bürgerlichen Zeitrechnung zugrunde. Jedoch beginnt man es nicht, wenn die Sonne durch den Frühlingspunkt geht, sondern sein Beginn ist so reguliert, daß der Frühlingsanfang auf den 21. oder 22. März fällt. Dies Datum ist schwankend, weil das Jahr nicht aus einer ganzen Anzahl von Tagen besteht, sondern es bleibt bekanntlich ein Rest von ungefähr $\frac{1}{4}$ Tag. Dies hat auch zur Folge, daß im Augenblick des bürgerlichen Neujahres die Sonnenlänge jedes Jahr verschieden ist. Die Astronomen beginnen dagegen das *astronomische* tropische Jahr, wenn die Rektaszension der mittleren Sonne des Äquators $280^0 = 18^h 40^m$ beträgt, was auch beim Beginn des bürgerlichen Jahres stets nahezu der Fall ist.

11. DAS DRITTE KEPLERSCHE GESETZ. DIE BAHNELEMENTE.

Sind a und a_1 die halben großen Achsen zweier Bahnellipsen und U und U_1 die siderischen Umlaufszeiten, so lautet das dritte Keplersche Gesetz:

$$\frac{a^3}{a_1{}^3} = \frac{U^2}{U_1{}^2}.$$

Nennt man die mittleren täglichen Bewegungen n und n_1, so ist also $\frac{2\pi}{U} = n$ und $\frac{2\pi}{U_1} = n_1$. Der Proportion kann man hiermit auch die Form geben:

$$\frac{a^3}{a_1{}^3} = \frac{n_1{}^2}{n^2}$$

oder

$$a^3 n^2 = a_1{}^3 n_1{}^2.$$

Diese Gleichung drückt aus, daß das Produkt aus der dritten Potenz der halben großen Achse und dem Quadrate der mittleren täglichen Bewegung bei allen Planetenbahnen denselben Wert hat, den man $= k^2$ setzt. k heißt die *Gaußsche Konstante.* Ihren Zahlenwert berechnet man am einfachsten aus der Erdbewegung, indem man die halbe große Achse

der Erdbahn als Längeneinheit (dies ist die sogenannte *astronomische Einheit*) und den mittleren Sonnentag als Zeiteinheit wählt. Dann ist $n^2 = k^2$, und da $U = 365{,}256$ Tage, so wird

$$k = n = \frac{2\pi}{365{,}256} = 0{,}0172.$$

Kepler hatte für die damals bekannten sechs großen Planeten gezeigt, daß der Quotient $\frac{a^3}{U^2}$ mit großer Annäherung einen konstanten Wert habe. Die kleinen Abweichungen der Zahlen hielt er, fest überzeugt von einer die Planetenwelt beherrschenden Zahlenharmonie, für die Folge von Beobachtungsfehlern. Die folgende Tabelle zeigt an dem Beispiele der acht großen Planeten sowie des kleinen Planeten Pallas, wie weit bei Zugrundelegung der neuesten Werte für a und U das dritte Keplersche Gesetz zahlenmäßig erfüllt ist. Es ist dieselbe Längen- und Zeiteinheit wie oben bei k gewählt.

	Merkur	Venus	Erde	Mars	Pallas
a	0,3871	0,7233	1,0000	1,5237	2,770
U	87,969	224,701	365,256	686,980	1684
$\frac{a^3}{U^2}$	$7496 \cdot 10^{-9}$	$7495 \cdot 10^{-9}$	$7496 \cdot 10^{-9}$	$7496 \cdot 19^{-9}$	$7495 \cdot 10^{-9}$

	Jupiter	Saturn	Uranus	Neptun
a	5,2028	9,5388	19,1910	30,0707
U	4332,59	10759,20	30685,93	60187,65
$\frac{a^3}{U^2}$	$7502 \cdot 10^{-9}$	$7498 \cdot 10^{-9}$	$7506 \cdot 10^{-9}$	$7506 \cdot 10^{-9}$

Man sieht, daß sich die Planeten mit größerer Masse (Jupiter—Neptun) dem Gesetze weniger gut einfügen als diejenigen mit kleiner Masse.

Wir werden die Gründe der Abweichungen vom dritten Keplerschen Gesetz noch kennen lernen, vorläufig wollen wir das Gesetz als streng erfüllt annehmen. Dann folgt daraus, daß a und n nicht als zwei voneinander unabhängige

Größen betrachtet werden dürfen, weil immer $a^3 n^2 = k^2$ ist. Man kann aus dieser Gleichung die halbe große Achse einer Bahn berechnen, wenn man die Umlaufszeit beobachtet und daraus n bestimmt hat.

Man bezeichnet als die *Elemente einer Bahn* alle diejenigen Bestimmungsstücke, welche ausreichen, um die Form und Lage der Bahn, sowie die Bewegung des Planeten vollständig zu beschreiben. Nach den bisherigen Auseinandersetzungen sind wir imstande, diese Elemente anzugeben:

Zwei Elemente bestimmen zunächst die Größe und Gestalt der Bahn, nämlich a, wofür auch n eintreten kann, und e (numerische Exzentrizität) oder a und φ, wo $\sin \varphi = e$ war.

Drei Elemente geben die Lage der Ellipse im Raum an relativ zu einer Grundebene, die in der Praxis die Ekliptik ist. Diese Elemente können sein: der Abstand des Perihels vom Knoten, die Länge des Knotens und die Neigung. (Vgl. Nr. 9.)

Als sechstes und letztes Element kommt noch die sogenannte *Epoche* hinzu, das ist die Zeit t_0, zu welcher der Planet eine bestimmte mittlere Anomalie hat. In dem Beispiel am Schluß von Nr. 9 war die Epoche 1899 Dez. 31 mittags 12^h (Berliner Zeit).

Bewegungsgesetze für die Kometen aufzustellen, gelang Kepler noch nicht; erst Newton (1642—1727) erkannte, daß auch diese Himmelskörper entweder Ellipsen um die Sonne beschreiben, wobei sie dieselben Gesetze befolgen wie die Planeten, oder daß ihre Bahnen ungeschlossene Kegelschnitte (Parabeln oder Hyperbeln) seien. Die ersten beiden Keplerschen Gesetze gelten auch in diesem Falle, nur hat man das Wort *Ellipse* durch *Kegelschnitt* zu ersetzen. Das dritte Gesetz aber verliert seinen Sinn, da es bei einer ungeschlossenen Kurve keine Umlaufszeit gibt.

Weil die Größe einer Parabel schon durch den Parameter bestimmt ist, so sind zur Beschreibung einer parabolischen Bahn nur fünf Elemente nötig.

12. ÜBER DIE KRAFT, DURCH WELCHE DIE BEWEGUNG IM KEGELSCHNITT HERVORGERUFEN WIRD.

Wir brauchen für die folgenden Untersuchungen zunächst die Differentialquotienten von v und r nach der Zeit, die wir jetzt berechnen wollen.

Um einen Ausdruck für die Winkelgeschwindigkeit $\frac{dv}{dt}$ zu erhalten, müssen wir vom zweiten Keplerschen Gesetz ausgehen. Da die ganze Ellipsenfläche in der Zeit U vom Radius bestrichen wird, so wird in der Zeiteinheit eine Fläche von der Größe $\frac{ab\pi}{U}$ bestrichen, die wir $=\frac{c}{2}$ setzen wollen. Nun ist nach einem Satze über die Ellipse bekanntlich $b=\sqrt{ap}$, also ist

$$\frac{\pi a\sqrt{ap}}{U}=\frac{c}{2}$$

oder

$$c=\frac{2\pi}{U}\cdot a^{\frac{3}{2}}\sqrt{p}=n\cdot a^{\frac{3}{2}}\sqrt{p}.$$

Da $n\cdot a^{\frac{3}{2}}=k$ war, so wird

$$c=k\sqrt{p}. \tag{1}$$

Für einen anderen Planeten würde man $c_1=k\sqrt{p_1}$ erhalten, da ja k eine allgemeine Konstante ist. Es folgt:

$$c:c_1=\sqrt{p}:\sqrt{p_1}, \tag{2}$$

die Flächengeschwindigkeiten verhalten sich also wie die Quadratwurzeln der Parameter.

In der Zeit Δt beschreibt der Radius den Winkel Δv in Bogenmaß, sein Endpunkt daher die Strecke $r\Delta v$, folglich hat das bestrichene Dreieck die Fläche $\frac{1}{2}r^2\Delta v$. In der Zeiteinheit wird die Fläche $\frac{1}{2}r^2\cdot\frac{\Delta v}{\Delta t}$ bestrichen, die wir $=\frac{c}{2}$ gesetzt hatten, so daß, wenn nun noch zur Grenze übergegangen wird,

$$c=r^2\cdot\frac{dv}{dt} \tag{3}$$

ist. Vergleichen wir (1) und (3), so erhalten wir

$$\frac{dv}{dt}=\frac{k\sqrt{p}}{r^2}. \tag{4}$$

Um auch den algebraischen Ausdruck für $\frac{dr}{dt}$ zu erhalten, differenzieren wir die Gleichung

$$\frac{p}{r} = 1 + e \cdot \cos v.$$

Zunächst ist

$$-\frac{p}{r^2} \cdot \frac{dr}{dt} = -e \sin v \cdot \frac{dv}{dt}$$

oder

$$\frac{dr}{dt} = \frac{e \sin v}{p} \cdot r^2 \frac{dv}{dt},$$

also nach (3)

$$\frac{dr}{dt} = \frac{e \sin v \cdot c}{p}. \qquad (5)$$

Wenn man für c den Wert (1) setzt, ergibt sich:

$$\frac{dr}{dt} = \frac{k e \sin v}{\sqrt{p}}. \qquad (6)$$

Wir gehen nunmehr zur Berechnung der Kraft über, welche die Planetenbewegung erzeugt.

Nehmen wir annäherungsweise die Bahnen als kreisförmig an, was bei den großen Planeten auch sehr nahe der Fall ist, so hat der Planet von der Sonne, die im Mittelpunkt steht, immer die gleiche Entfernung, seine Geschwindigkeit ist also zufolge des zweiten Keplerschen Gesetzes konstant. Wir haben es dann mit einer gleichförmigen Kreisbewegung zu tun, deren Beschleunigung nach Nr. 4 gegen das Zentrum gerichtet ist und die Größe $n^2 a$ hat. Setzen wir

$$n^2 = \frac{k^2}{a^3},$$

so wird die nach der Sonne gerichtete Beschleunigung $= \frac{k^2}{a^2}$, ist also umgekehrt proportional dem Quadrate der Entfernung.

Welchen Wert hat aber die Beschleunigung, wenn wir die genaue, elliptische Bahnform zugrunde legen?

Da die Flächengeschwindigkeit des Radius konstant ist, so fällt die Beschleunigung nach Nr. 5 in den Radius, und ihr Betrag ist (nach Nr. 5 Schluß):

$$R = \frac{d^2 r}{dt^2} - r\left(\frac{dv}{dt}\right)^2. \tag{7}$$

Nun findet man aus (5) mit Benutzung von (3)

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = \frac{e \cos v \cdot c}{p} \frac{dv}{dt} = \frac{e \cos v \cdot c^2}{p \cdot r^2}.$$

Nach der Polargleichung ist

$$e \cos v = \frac{p - r}{r},$$

daher

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = \frac{c^2 (p - r)}{p \cdot r^3}; \tag{8}$$

aus (3) folgt

$$r\left(\frac{dv}{dt}\right)^2 = \frac{c^2}{r^3}.$$

Also ist

$$R = -\frac{c^2}{p^2} \cdot \frac{1}{r^2} = -\frac{k^2}{r^2}$$

wegen (1).

Da die Beschleunigung nach der Sonne hin gerichtet ist (wegen des negativen Vorzeichens), so sagt man, der Planet werde von der Sonne angezogen und zwar umgekehrt proportional dem Quadrate seiner Entfernung r von der Sonne.

Denselben Satz findet man auch für die Beschleunigung der Kometen, weil die Beobachtung ergeben hat, daß die Gleichungen (1) und (2) bei ihnen ebenfalls erfüllt sind. In der weiteren Rechnung war die Polargleichung

$$\frac{p}{r} = 1 + e \cos v$$

benutzt worden, die aber jeden Kegelschnitt je nach dem Werte von e darstellen kann. Somit sind die aus der Planetenbewegung gezogenen Konsequenzen auch für die Kometen gültig.

Der erste, der diese Folgerung aus den Keplerschen Gesetzen abgeleitet hat, war Newton. Er bewies aber auch zugleich die wichtige Umkehrung des Satzes, daß nämlich jeder Körper, der von der Sonne umgekehrt proportional dem Quadrate der Entfernung angezogen wird, einen Kegelschnitt beschreiben muß.

Denken wir uns nämlich zunächst einen Körper, der nach den Keplerschen Gesetzen um die Sonne einen Kegelschnitt beschreibt und das Perihel zur Zeit t_0 mit der Geschwindigkeit u_0 passiert, so wirkt auf den Körper eine Kraft nach dem von Newton aufgestellten Gesetze. Wenn wir die genannten Anfangsbedingungen beibehalten, so gibt es unter dem Einflusse des Newtonschen Kraftgesetzes nur eine einzige Bahn, wie aus Nr. 3 folgt; d. h. ein Körper, der bei den gleichen Anfangsbedingungen eine andere Bahn beschriebe als den Kegelschnitt, von dem wir ausgingen, würde nicht umgekehrt proportional dem Quadrate der Entfernung nach der Sonne zu beschleunigt werden. Das Newtonsche Anziehungsgesetz muß also zu dem Kegelschnitt führen, womit obiger Umkehrungssatz bewiesen ist. Die Form des Kegelschnittes hängt vom Ort und von der Geschwindigkeit zur Zeit t_0 ab. Aus dem Newtonschen Anziehungsgesetz folgt also das erste Keplersche Gesetz und nach Nr. 5 auch das zweite. Wir wollen nunmehr auch das dritte Keplersche Gesetz aus dem Anziehungsgesetz ableiten:

Wir setzen also voraus, daß in dem Ausdruck (7):

$$R = -\frac{k^2}{r^2} \qquad (7a)$$

ist. Setzen wir die Flächengeschwindigkeit wieder $= \frac{c}{2}$, so gelten die Gleichungen (3) – Flächensatz – (5) und (8), die alle Folgerungen des ersten und zweiten Keplerschen Gesetzes sind. Setzt man (3) und (8) in (7a) ein, so folgt

$$k^2 = \frac{c^2}{p}. \qquad (9)$$

Nun können wir, wie im Anfang dieser Nummer geschehen war, die Flächengeschwindigkeit auch mit Hilfe der ganzen Ellipsenfläche ausdrücken:

$$c = n \cdot a^{\frac{3}{2}} \sqrt{p}$$

und diesen Ausdruck dann in (9) einsetzen. Es ergibt sich

$$k^2 = n^2 a^3;$$

d. h. wir haben das dritte Keplersche Gesetz wiedergefunden.

Das Newtonsche Gesetz erscheint also als eine Folge der

Keplerschen Gesetze, und diese können wiederum aus dem ersteren abgeleitet werden, so daß das Gesetz von Newton einerseits und die Sätze Keplers andererseits uns vorläufig wie gleichwertige, wenn auch verschiedene Ausdrucksweisen vorkommen, um ein und dieselbe Erscheinung zu beschreiben. Wir werden aber bald sehen, daß das Newtonsche Gesetz von weittragender Bedeutung ist und Folgerungen gestattet, die auf Grund der Keplerschen Gesetze nie hätten gezogen werden können.

13. DIE BAHNBESTIMMUNG.

Die *Bahnbestimmung* hat zur Aufgabe, aus wenigen Beobachtungen eines Gestirns seine Bahn, d. h. deren Elemente zu berechnen. Zur Lösung dieses Problems geht man von der Erfahrungstatsache aus, daß sich alle Körper des Sonnensystems in Kegelschnitten nach den Keplerschen Gesetzen bewegen. Im allgemeinen ist ein Kegelschnitt durch fünf seiner Punkte bestimmt, wir werden aber sehen, daß zur Berechnung einer Bahn schon drei Beobachtungen genügen, wenn deren Zeiten bekannt sind:

Durch die drei Beobachtungen sind die Richtungen von drei Geraden definiert, die durch den Beobachtungsort gehen. Von jeder durch die Sonne gelegten Ebene werden diese Geraden in drei Punkten geschnitten, die zusammen mit der Sonne als Brennpunkt einen Kegelschnitt bestimmen können. Den gesuchten Kegelschnitt enthält nun diejenige Ebene, in welcher der Keplersche Flächensatz erfüllt ist, wenn der Himmelskörper die erwähnten drei Schnittpunkte zu den beobachteten Zeiten erreicht. Bei dieser Entscheidung über die auszuwählende Ebene kommt es eigentlich nur auf die Zwischenzeiten der Beobachtungen an, aber man wird auch die absolute Uhrangabe notieren, weil man nicht bloß die Bahn kennen will, sondern auch den Ort des Himmelskörpers zu jeder späteren Zeit.

Die wirkliche Durchführung des hier angedeuteten Problems erfordert einen großen Aufwand von mathematischen Entwicklungen, und es waren seit Newtons großen Untersuchungen 100 Jahre vergangen, bis Gauß eine für die

Rechnung brauchbare Methode der Bestimmung einer Planetenbahn fand.

Vor der Entdeckung der kleinen Planeten konnte es sich beim Problem der Bahnbestimmung immer nur um Kometen handeln, denn die Bahnelemente der großen Planeten waren hinlänglich bekannt.

Da die Kometenbahnen in der Nähe des Perihels, also während der Zeit der Sichtbarkeit des Kometen, in allen Fällen nur wenig von einer Parabel abweichen, so handelte es sich beim Kometenbahnproblem um die Bestimmung der Elemente einer parabolischen Bahn aus 3 Beobachtungen. Unter den Namen der Mathematiker, die das Problem im 18. Jahrhundert Schritt für Schritt gefördert haben, sind vor allem zu nennen: Newton, der eine graphische Methode angab, nach der Halley eine große Zahl von Kometen-Bahnen bestimmt hat; ferner Euler, Lagrange, Laplace und Lambert. Die endgültige Form, die für die astronomische Rechnung am zweckmäßigsten ist, fand Olbers am Ausgang des 18. Jahrhunderts auf der Grundlage der Arbeiten seiner Vorgänger.

Etwa zehn Jahre später, am Anfang des 19. Jahrhunderts, veröffentlichte Gauß die grundlegende „Theoria motus corporum caelestium" („Theorie der Bewegung der Himmelskörper"), ein Werk, das man das klassische Lehrbuch der Bahnbestimmung genannt hat, und das eine bequeme Methode enthält, die Elemente einer elliptischen Bahn aus drei Beobachtungen zu berechnen.

Wie bei allen Gaußschen Arbeiten, so war auch in dieser das behandelte Problem mit einer Vollständigkeit und Eleganz gelöst, die wesentliche Verbesserungen nicht mehr zuließ. Durch die zu Anfang des 19. Jahrhunderts gemachte Entdeckung der vier größten unter den kleinen Planeten war das Problem der Bestimmung einer elliptischen Bahn aktuell geworden und ist es in der zweiten Hälfte des Jahrhunderts in erhöhtem Maße geblieben, als durch die zahlreichen Entdeckungen neuer Planeten deren Zahl bis in die Hunderte anstieg. Häufig stellte es sich auch heraus, daß ein vermeintlicher neuer Planet schon früher gesehen worden war, indem sich nämlich die beiden Systeme von Elementen als identisch erwiesen. Besonders charakteristisch sind hierbei

für einen Planeten die Elemente Ω und i, weil sie die Bahnebene bestimmen (s. S. 18).

Die Örter der wichtigsten der kleinen Planeten werden für die Zeit der günstigsten Sichtbarkeit, d. i. die Opposition, berechnet und in einer *Oppositionsephemeride* zusammengestellt, eine Arbeit, an der das Berliner Recheninstitut hauptsächlich beteiligt ist.

III. ABSCHNITT.

DAS NEWTONSCHE GRAVITATIONSGESETZ UND SEINE ANWENDUNGEN.

14. ÜBER DAS ALLGEMEINE ANZIEHUNGSGESETZ.

Wie die Planeten um die Sonne, so bewegen sich die Satelliten in Ellipsen um ihre Planeten und befolgen dabei auch die Keplerschen Gesetze, werden also auch umgekehrt proportional dem Quadrat der Entfernung vom Planeten angezogen. Dies brachte Newton auf den Gedanken, daß die Erde z. B. nicht nur den Mond, sondern jeden Körper nach diesem Gesetze anziehe. Um die Berechtigung dieses Gedankens zu erweisen, zeigte er durch die Rechnung, daß die Fallbewegung auf der Erdoberfläche und die Bewegung des Mondes auf dieselbe beschleunigende Kraft führten, nur daß diese beim Monde umgekehrt proportional dem Quadrat der Entfernung abgeschwächt erscheine.

Um dies rechnerisch nachzuprüfen, betrachten wir die Mondbahn als Kreis und benutzen den Ausdruck n^2a für die Beschleunigung bei der Kreisbewegung. Setzen wir $n = \frac{2\pi}{U}$, so wird die Beschleunigung $\frac{4\pi^2 a}{U^2}$. Ist der Erdradius R, so ist der Radius der Mondbahn $a = 60R$. Dabei berechnet man R aus dem halben Erdumfang, gemessen längs eines Meridians:

$$\pi R = 20\,000\,000 \text{ m}.$$

Es ist also

$$a = \frac{60 \cdot 20\,000\,000}{\pi} \text{ m}$$

zu setzen. Die siderische Umlaufszeit des Mondes beträgt

$$U = 27^d 7^h 43^m = (39343 \cdot 60)^s,$$

folglich erfährt er in einer Sekunde gegen den Erdmittelpunkt die Beschleunigung:

$$\frac{4\pi^2 \cdot 60 \cdot 20000000}{2\pi (39343 \cdot 60)^2} \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{sec}^2} = 0{,}002706 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{sec}^2}.$$

An der Erdoberfläche, also 60mal näher, muß die Beschleunigung 60^2mal so groß sein, wenn das Anziehungsgesetz allgemein gültig ist. Man findet:

$$0{,}002706 \cdot 60^2 = 9{,}74 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{sec}^2}.$$

Dieser Wert stimmt mit dem mittleren Wert der Schwerebeschleunigung:

$$g = 9{,}82 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{sec}^2} \quad \text{(Nr. 4)}$$

recht gut überein, ein Umstand, der Newton die Gewißheit gab, daß er mit seinen Spekulationen über die Anziehung auf dem richtigen Wege war.

Am Anfang dieses Abschnitts machten wir auf die Gesetzmäßigkeiten der Trabantenbewegungen aufmerksam; um eine deutlichere Vorstellung davon zu geben, wollen wir für einige der Monde des Jupiter, Saturn und Uranus die Quotienten $\frac{a^3}{U^2}$ des dritten Keplerschen Gesetzes bilden, wobei wieder a in astronomischen Einheiten und U in mittleren Sonnentagen angegeben wird:

Jupiter

Monde	I	II	III	IV
a	0,00282	0,00449	0,00715	0,01258
U	1,7691	3,5512	7,1546	16,6890
$\frac{a^3}{U^2}$.	$7166 \cdot 10^{-12}$	$7178 \cdot 10^{-12}$	$7141 \cdot 10^{-12}$	$7148 \cdot 10^{-12}$

Saturn

Monde	III Thetis	V Rhea	VI Titan	VIII Japetus
a	0,00197	0,00353	0,00818	0,02384
U	1,8878	4,5175	15,9454	79,3310
$\frac{a^3}{U^2}$	$2145 \cdot 10^{-12}$	$2155 \cdot 10^{-12}$	$2153 \cdot 10^{-12}$	$2153 \cdot 10^{-12}$

Uranus

Monde	I Ariel	II Umbriel	III Titania	IV Oberon
a	0,00128	0,00179	0,00293	0,00392
U	2,5204	4,1441	8,7059	13,4633
$\frac{a^3}{U^2}$	$3301 \cdot 10^{-13}$	$3340 \cdot 10^{-13}$	$3319 \cdot 10^{-13}$	$3323 \cdot 10^{-13}$

Also auch bei den Trabanten gilt das dritte Keplersche Gesetz angenähert.

Newton erkannte ferner, daß nicht nur die Sonne die Planeten anzieht, sondern daß diese auch ihrerseits die Sonne anziehen müssen. Man sieht das folgendermaßen ein: Wir denken uns die Sonne und einen Planeten durch eine unbiegsame Stange verbunden, so daß wir beide Körper jetzt als einen einzigen betrachten dürfen. Würde nur eine nach der Sonne gerichtete Kraft vorhanden sein, so müßte das System eine Bewegung in der Richtung des Radius gegen die Sonne ausführen, weil die Stange den Druck des Planeten auf die Sonne überträgt. Da es aber undenkbar ist, daß ein System starr verbundener Körper durch Anziehungskräfte zwischen den Körpern aus der Ruhe in Bewegung übergeht, so muß notwendig in der Richtung des Radius eine der Sonnenanziehung gleiche, aber nach dem Planeten hin gerichtete Anziehung vorhanden sein. Der Planet zieht also die Sonne mit derselben Kraft an, mit der er von der Sonne angezogen wird. Dies ist ein besonderer Fall des von Newton aufgestellten Satzes der Gleichheit von Wirkung und Gegenwirkung.

Newton tat nun den wichtigen Schritt, daß er das Anziehungsgesetz nicht nur auf die Himmelskörper beschränkte,

sondern ein allgemeines Weltgesetz darin erblickte, nach dem sich zwei Massenteilchen stets umgekehrt proportional dem Quadrat ihrer Entfernung anziehen.

Um den Satz als eine Gleichung aussprechen zu können, betrachten wir einen Planeten mit der Masse m und die Sonnenmasse M. Erfährt der Planet die Beschleunigung G, so wirkt auf ihn die Kraft Gm; die Sonne möge durch die Anziehung des Planeten die Beschleunigung g erhalten, dann ist die anziehende Kraft des Planeten gM. Nach dem Satze von Wirkung und Gegenwirkung ist

$$Gm = gM,$$

oder

$$\frac{G}{g} = \frac{M}{m}.$$

G ist also proportional M und g ist proportional m, oder die Beschleunigung, welche ein Körper durch seine Anziehungskraft einem anderen erteilt, ist der Masse des anziehenden Körpers proportional. Befindet sich m in der Entfernung r, so muß die Beschleunigung G also proportional $\frac{M}{r^2}$ sein. Nennen wir den Proportionalitätsfaktor f, so erhalten wir

$$G = f \cdot \frac{M}{r^2}.$$

Die anziehende Kraft der Sonne ist also

$$Gm = f \cdot \frac{Mm}{r^2}.$$

Gewöhnlich setzt man die Sonnenmasse $M = 1$ und erhält dann für die Beschleunigung des Planeten $\frac{f}{r^2}$. Aus der elliptischen Bewegung war aber für dieselbe Größe der Ausdruck $\frac{k^2}{r^2}$ gefunden worden, so daß

$$f = k^2$$

ist. Also wird

$$G = \frac{k^2}{r^2}$$

und

$$g = Gm = \frac{k^2 m}{r^2}.$$

Die Sonne zieht hiernach die Masse m mit der Kraft $\frac{k^2 m}{r^2}$ an, wobei ihre eigene Masse die Einheit ist.

Für die Anziehungskraft zweier beliebiger Massen M und m erhalten wir dann

$$\frac{k^2 Mm}{r^2}$$

als Ausdruck für das Newtonsche Gesetz der allgemeinen Schwere oder Gravitation. In der Entfernung $r = 1$ erteilt die Masse $M = 1$ [Sonne] einem Körper die Beschleunigung k^2; daher nennt man diese Größe auch oft die *Anziehungskraft der Sonne.* Unter dieser Bezeichnung findet sich auch k im Anhang der Logarithmentafeln.

Das Anziehungsgesetz ist schon vor Newton ausgesprochen worden, konnte jedoch immer nur als vage Hypothese gelten, weil niemand daraus mathematische Schlüsse zu ziehen vermocht hatte. Schon 80 Jahre vor Newton erklärte Kepler[1]) die Schwere für eine dem Magnetismus ähnliche Kraft, die alle Körper zu vereinigen trachtet und mit der Entfernung abnimmt. In seinem Werke: „Astronomia nova" stellte er sogar die Vermutung auf, daß die Anziehungskraft der Sonne mit dem Quadrate der Entfernung abnehme. Er behauptet ferner, daß zwei Steine außerhalb des Wirkungsbereiches anderer Massen sich durch die gegenseitige Anziehung an einer mittleren Stelle treffen würden, und zwar sollten sich dann ihre Wege umgekehrt wie ihre Massen verhalten. Dieser Satz drückt aus, daß die Anziehungskraft den Massen proportional sei, wie man an den Ausführungen der Nr. 17 erkennt. Danach hatte Kepler schon vollständig richtige Vorstellungen über das Gravitationsgesetz. Den schlagendsten Beweis für die Anziehung von Erde und und Mond sah er in der Erscheinung der Ebbe und Flut.

Vor Newton begegnet man den Keplerschen Gedanken noch bei anderen Gelehrten: Der französische Arzt Bouillaud (Ismael Bullialdus) schreibt 1645 in einem Werk über Astronomie, daß die Anziehungskraft dem Quadrate der Entfer-

---

1) Ausführlicheres findet man in einer Darstellung der Lebensarbeit Keplers von Ludwig Günther: „Die Mechanik des Weltalls", Teubner 1909.

nung umgekehrt proportional sei. Der italienische Mathematiker Borelli sagt in einem Buche über die Jupitermonde (1666), daß sie sich nach denselben Gesetzen wie die Planeten bewegten. In demselben Jahre trug Hooke in der Londoner Akademie über die Abnahme der Schwere mit zunehmender Entfernung von der Erde vor, und einige Jahre später lehrte er in einer Schrift, daß alle Himmelskörper eine gegen ihren Mittelpunkt gerichtete Anziehungskraft besäßen, wodurch sie auf ihre eigenen Atome sowie auf fremde Körper wirkten. Hooke, sowie Wren und Halley haben nach Newtons eigenen Worten[1]) unabhängig von ihm gefunden, daß die anziehende Kraft dem Quadrate der Entfernung umgekehrt proportional sei.

Huyghens, dessen genialem Scharfsinn die mathematische Physik eine Reihe der wichtigsten Erkenntnisse verdankt, veröffentlichte damals Lehrsätze über die Zentrifugalkraft, mit denen er das Gravitationsgesetz hätte finden müssen, wenn er die Bewegung der Planeten in geeigneter Weise in seine Betrachtungen gezogen hätte.

Das allgemeine Massenwirkungsgesetz mit den daraus fließenden mathematischen Erklärungen der Planetenbewegungen gab erst Newton in seinem 1687 unter dem Titel „Philosophiae naturalis principia mathematica“ erschienenen unsterblichen Werke, worin er die Lehre von den Bewegungen am Himmel über den Standpunkt der bloßen Beschreibung in das Gebiet der Mechanik erhob und dadurch zum Begründer der *Himmelsmechanik* wurde. Es dauerte aber lange, bis seine Lehren allgemeine Anerkennung fanden, wie man daraus sieht, daß noch 1732 Johann Bernoulli von der Pariser Akademie einen Preis für eine Arbeit erhielt, in der er die Planetenbewegung durch Descartes' Wirbeltheorie erklärte.

15. ANZIEHUNG EINER KUGEL.

Bei den bisherigen Betrachtungen wurden die Himmelskörper als Punkte angesehen, und in der Tat sind die Ra-

1) Newton: „Principia“, Buch I Abschn. II. Ich verdanke die letzte Bemerkung der freundlichen Mitteilung von Herrn Prof. Witting.



dien der Planeten klein im Vergleich zu ihren gegenseitigen Entfernungen. So ist z. B. die Venus in Erdnähe von uns immer noch 6400 Erdradien entfernt. Der Jupiter hat im Minimum von dem kleinen Planeten Thule (279) einen Abstand von fast 2000 Jupiterradien, und dabei gehört dieser kleine Planet zu denjenigen, die dem Jupiter am nächsten kommen. Zu etwas anderen Zahlen kommt man jedoch, wenn man die Entfernungen in Sonnenradien mißt, denn Merkur ist z. B. nur etwas über 80 Sonnenradien vom Zentralgestirn entfernt. Für die Entfernungen der Trabanten vom Hauptplaneten, gemessen mit dem Radius desselben, erhält man noch kleinere Beträge. So hat der Mond von der Erde den Abstand 60 und der innerste Jupitermond nur 2,55. Man sieht an diesen Zahlen, daß man die Dimensionen der Himmelskörper nicht in allen Fällen neben ihren gegenseitigen Distanzen vernachlässigen kann. Nun hat aber schon Newton bewiesen, daß die Anziehung einer Kugel auf einen äußeren Punkt ebenso groß ist wie die Anziehung ihres Mittelpunkts, wenn man sich in ihm die Kugelmasse vereinigt denkt. Eine Kugel von der Masse M erteilt demnach einem Massenpunkt, der vom Kugelmittelpunkt die Entfernung r hat, durch ihre Anziehung die Beschleunigung

$$k^2 \frac{M}{r^2}.$$

Da die Himmelskörper nahezu kugelförmig sind, so ist es also richtig gewesen, bei Berechnung ihrer Anziehung ihre Massen in ihren Mittelpunkten vereinigt zu denken, d. h. die Körper als mathematische Punkte zu behandeln.

Vorstehende Formel kann dazu dienen, die Masse der Erde zu berechnen, da wir die Beschleunigung g durch die Schwere kennen. Es ist

$$g = k^2 \cdot \frac{M}{R^2},$$

wo M die Erdmasse und R den Radius der Erde bedeutet. Folglich ist

$$M = \frac{g \cdot R^2}{k^2}.$$

Nun war $k^2 = a^3 n^2 = \left(\frac{2\pi}{U}\right)^2 \cdot a^3$ (Nr. 11), folglich:

$$M = \frac{g U^2 R^2}{4\pi^2 a^3}.$$

Hierin setzt man

$g = 9{,}82\ \frac{m}{sec^2}$ (vgl. Nr. 4), für die geograph. Breite von 45^0,

$R = 6370000\ m$, Radius einer Kugel von gleichem Inhalt wie die Erde,

$U = 365{,}256$ Tage $= (365{,}256 \cdot 86400)^s$,

$a = 1495 \cdot 10^8\, m$.

Man erhält dann für die

$$\text{Erdmasse} = \frac{1}{332400} \text{ der Sonnenmasse.}$$

Dies Resultat stimmt ziemlich gut mit den Werten überein, die am Ende von Nr. 16 mitgeteilt werden.

Wenn wir bisher die Himmelskörper als kugelförmig betrachtet haben, so begehen wir damit bei einigen einen Fehler, der sich bei manchen Rechnungen noch bemerkbar machen kann. Man hat nämlich bei der Erde, dem Jupiter und Saturn eine Abplattung festgestellt, so daß am Äquator eine Art wulstförmiger Verdickung vorhanden ist. Diese bewirkt, wie eine mathematische Untersuchung lehrt, daß die Trabanten eines solchen abgeplatteten Körpers nach der Äquatorebene gezogen werden; dagegen ist die Wirkung des Äquatorwulstes auf größere (interplanetarische) Entfernungen fast immer unmerkbar klein.

Wegen der Gleichheit von Wirkung und Gegenwirkung (vgl. Nr. 15) muß die Äquatorebene eines abgeplatteten Körpers ihrerseits durch die anderen Himmelskörper bewegt werden, und zwar sucht der äußere Körper die Äquatorebene so zu stellen, daß er sich in ihr befindet. Diese Rückwirkung, wie man sagen kann, ist bei der Erde viel stärker als die zuerst betrachtete äußere Wirkung des Äquatorwulstes, und sie veranlaßt die Erdachse unter dem Einflusse der Sonnenanziehung dazu, in 26000 Jahren den Mantel eines Doppelkegels zu beschreiben. Weil die Äquinoktialpunkte, das sind die Schnittpunkte von Äquator und Ekliptik, dabei der Sonne auf der Ekliptik entgegengehen, indem sie vorrücken, so heißt diese Bewegung die *Präzession.* Der Mond verursacht gleichzeitig eine kleinere Kegelbewegung der Erdachse, die *Nutation,* die eine Periode von nur 18,7 Jahren hat.

16. STRENGE FORM DES DRITTEN KEPLERSCHEN GESETZES. BERECHNUNG DER PLANETENMASSEN.

Aus der allgemeinen Massenanziehung hatten wir in Nr. 15 geschlossen, daß ein Planet gegen die Sonne die Beschleunigung $G = \frac{k^2}{r^2}$ und die Sonne gegen den Planeten die Beschleunigung $g = \frac{k^2 m}{r^2}$ erhält, wo m die Planetenmasse war, gemessen an der Sonnenmasse als Einheit. Beide Beschleunigungen suchen die Gestirne einander zu nähern, und wenn man die Sonne als feststehend betrachtet, so treibt eine Beschleunigung

$$G + g = \frac{k^2(1 + m)}{r^2}$$

den Planeten gegen die Sonne. Die Bewegung des Planeten relativ zur Sonne erfolgt demnach so, als ob die Sonne die Masse $1 + m$ hätte, und in unseren früheren Gleichungen ist daher k^2 durch $k^2(1 + m)$ zu ersetzen.

Das dritte Keplersche Gesetz lautet also in seiner strengen Fassung:

$$n^2 a^3 = k^2(1 + m),$$

oder für zwei Planeten:

$$\frac{n^2 a^3}{1 + m} = \frac{n'^2 a'^3}{1 + m'}.$$

Da aber die Planetenmassen sehr klein sind (die Masse des Jupiter ist immer noch $< \frac{1}{1000}$ der Sonnenmasse), so sind die Größen $1 + m$ nur sehr wenig von 1 verschieden. Bei einer genauen Berechnung der Gaußschen Konstanten muß man jedoch von dem Werte $k^2 = \frac{n^2 a^3}{1 + m}$ ausgehen. Er stimmt in den ersten vier Dezimalstellen jedoch mit dem Werte $k^2 = n^2 a^3$ überein, der in Nr. 11 aus der Erdbewegung abgeleitet wurde.

Das dritte Keplersche Gesetz gibt uns ein Mittel, die Verhältnisse der Planetenmassen aus der Beobachtung ihrer Trabanten abzuleiten: Es sei nämlich M die Masse eines Zentralgestirns und m diejenige eines Körpers, der um das-

selbe eine Ellipse nach den Keplerschen Gesetzen beschreibt. Ein anderes Sternpaar habe die Massen M' und m'. Statt der Sonnenmasse 1 haben wir in den obigen Ausdrücken M und M' zu setzen und erhalten als Keplersches Gesetz für die beiden Bewegungen

$$n^2 a^3 = k^2 (M + m)$$

und

$$n'^2 a'^3 = k^2 (M' + m').$$

Folglich ist

$$n^2 a^3 : n'^2 a'^3 = (M + m) : (M' + m').$$

Sind U und U' die Umlaufszeiten von m und m' um ihre Zentralgestirne, so ist

$$n : n' = U' : U,$$

daher:

$$(M + m) : (M' + m') = \frac{a^3}{U^2} : \frac{a'^3}{U'^2}. \qquad (1)$$

Sind nun M und M' sehr groß gegen m und m', wie die Sonnenmasse im Vergleich zu den meisten Planeten oder letztere gegenüber den meisten ihrer Trabanten, so kann man ohne merklichen Fehler statt der letzten Proportion auch schreiben:

$$M : M' = \frac{a^3}{U^2} : \frac{a'^3}{U'^2}. \qquad (2)$$

Diese Gleichung kann man auch leicht aus der Kreisbewegung ableiten:

Ein Trabant des Zentralgestirns M erfährt nämlich nach dem Newtonschen Gesetz in der Entfernung a die Beschleunigung $\frac{k^2 M}{a^2}$, und nach der Theorie der Kreisbewegung die Beschleunigung $n^2 a$ (Nr. 4, (4)). Vergleicht man also die Bewegungen um zwei Massenzentren M und M', so gelten die Gleichungen

$$\frac{M}{a^2} : \frac{M'}{a'^2} = n^2 a : n'^2 a'$$

oder

$$\frac{M}{a^2} : \frac{M'}{a'^2} = \frac{a}{U^2} : \frac{a'}{U'^2},$$

woraus sofort (2) folgt. Da die halben großen Achsen und

die Umlaufszeiten der Trabanten beobachtet werden können, so findet man aus (2) das Massenverhältnis der Zentralgestirne.

Wir werden bei der folgenden Rechnung in jedem Satellitensystem diejenigen Trabanten wählen, bei denen der Quotient $\frac{a^3}{U^2}$ einen mittleren Wert unter den Beispielen von Nr. 14 hat. Diese Quotienten sind dann mit der Zahl $\frac{a^3}{U^2}$ für die Bewegung der Planeten (z. B. der Erde, Nr. 11) zu vergleichen, wodurch man nach Gleichung (2) die Verhältnisse der Masse der Planeten zur Masse der Sonne erhält. Die folgende Tabelle enthält in der ersten Zeile die Zahlen aus Nr. 11 und Nr. 14, darunter stehen die nach (2) berechneten Planetenmassen, denen zum Vergleich die Resultate einiger Astronomen hinzugefügt sind. Einheit der Masse ist, wie aus der Rechnung hervorgeht, die Sonnenmasse.

	Planeten (Erde)	Jupitermond IV	Saturnmond VIII	Uranusmond IV
$\frac{a^3}{U^2}$	$7496 \cdot 10^{-9}$	$7148 \cdot 10^{-12}$	$2153 \cdot 10^{-12}$	$3323 \cdot 10^{-13}$
	Masse des	Jupiter $\frac{1}{1049}$	Saturn $\frac{1}{3482}$	Uranus $\frac{1}{22560}$
	Vergleichswerte Berechner	$\frac{1}{1047,6}$ Bessel	$\frac{1}{3501,6}$ Bessel	$\frac{1}{22600}$ Newcomb.

Die folgende Tabelle enthält das Zahlenmaterial zur Berechnung der Massen des Mars und Neptun.

	Marsmond I	Neptunmond
a U	0,0000627 0,31892	0,002372 astr. Einheiten 5,8769 mittl. Tage
$\frac{a^3}{U^2}$	$2424 \cdot 10^{-15}$	$3864 \cdot 10^{-13}$

	Marsmond I	Neptunmond
Masse des	Mars $\frac{1}{3093000}$	Neptun $\frac{1}{19400}$
Vergleichswerte Berechner	$\frac{1}{3093500}$ Hall	$\frac{1}{19380}$ Newcomb

Die Werte, welche die Astronomen für die Planetenmassen gefunden haben, weichen bei ein und demselben Planeten von einander ab, weil die Dimensionen der Satellitenbahnen verschieden angegeben werden. Überhaupt ist das Problem der Massenbestimmung aus der Satellitenbewegung nicht so einfach, wie es nach dem dritten Keplerschen Gesetze scheinen könnte; und daß die hier berechneten Massen auch nur als angenähert richtig gelten können, geht schon aus der Willkür hervor, mit der einzelne Monde aus den Trabantensystemen zur Massenberechnung bevorzugt wurden. Da der Quotient $\frac{a^3}{U^2}$ für jeden Mond einen etwas anderen Wert hat, so erhält man für die Masse des Hauptplaneten etwas andere Beträge, wenn man eine andere Mondbahn bei der Berechnung zugrunde legt. Wir werden noch in Nr. 20 hiervon zu sprechen haben.

An dieser Stelle soll auch die Erdmasse aus der Mondbewegung abgeleitet werden. Es sei die Masse der Sonne S, die der Erde E und die des Mondes M. Aus der Nutationsbewegung der Erdachse, die durch die Anziehung der Mondmasse hervorgerufen wird, hat man gefunden, daß $M = \frac{E}{81{,}5}$ ist, also nicht bei der folgenden Rechnung vernachlässigt werden kann. Wir müssen deshalb auf (1) zurückgehen und schreiben:

$$\frac{S+E}{E+M} = \frac{\frac{a^3}{U^2}}{\frac{a'^3}{U'^2}} = \frac{7496 \cdot 10^{-9}}{2277 \cdot 10^{-14}},$$

wo die mittlere Entfernung des Mondes $a' = 0{,}002571$ astr. Einh., und seine siderische Umlaufszeit $U' = 27{,}322$ mittl. Tagen gesetzt wurde.

Im Zähler des Bruches kann E neben S vernachlässigt werden. Setzt man $S = 1$, so erhält man

$$E + M = \frac{1}{329200} \left(\text{nach Newcomb } \frac{1}{329390}\right)$$

für die vereinigten Massen von Erde und Mond.

Setzt man $M = \frac{E}{81,5}$, so wird

$$E + M = E \cdot \frac{82,5}{81,5},$$

also

$$E = \frac{1}{329200} \cdot \frac{81,5}{82,5} = \frac{1}{333200}.$$

Eine deutliche Vorstellung von den verschiedenen Massen der Himmelskörper erhält man durch Vergleichung der Strecken, die ein Körper in der Nähe ihrer Oberfläche in der ersten Sekunde durchfallen würde. An der Oberfläche einer Kugel von der Masse M und dem Radius R erhält ein Körper die Beschleunigung:

$$g = k^2 \frac{M}{R^2}.$$

Bei zwei Kugeln haben wir

$$g : g_1 = \frac{M}{R^2} : \frac{M_1}{R_1^{\,2}} = \frac{M}{M_1} \cdot \left(\frac{R_1}{R}\right)^2.$$

In demselben Verhältnis stehen die Fallräume in der ersten Sekunde. Beziehen sich die Buchstaben g, M, R auf die Erde, g_1, M_1, R_1 auf die Sonne, so ist

$$\frac{M}{M_1} = \frac{1}{333200}, \quad \frac{R_1}{R} = 109,$$

folglich

$$\frac{g}{g_1} = \frac{1}{28}.$$

Beim Monde ist

$$\frac{M}{M_1} = 81,5; \qquad \frac{R_1}{R} = 0,27,$$

also

$$\frac{g}{g_1} = \frac{6}{1}.$$

Da sich die Gewichte wie die Beschleunigungen verhalten, so wiegt die Masse eines Kilogramms auf der Sonne 28 kg und auf dem Monde etwa $\frac{1}{6}$ kg.

17. DER SATZ VON DER ERHALTUNG DES SCHWERPUNKTES.

Erhält der Planet mit der Masse m durch die Anziehungskraft der Sonne die Beschleunigung G und die Sonne durch den Planeten die Beschleunigung g, z. B. in einer Sekunde, so war nach Nr. 14: $Gm = g$, wenn die Masse der Sonne gleich 1 gesetzt wurde. Von den Fallgesetzen her ist nun bekannt, daß Planet und Sonne am Ende der ersten Sekunde die Geschwindigkeit G und g erreicht und die Wege $\frac{G}{2}$ und $\frac{g}{2}$ zurückgelegt haben müssen. Da die Entfernung der beiden Gestirne sich verkleinert hat, so ist ihre gegenseitige Anziehung stärker geworden. Wir wollen die vergrößerten Beschleunigungen G_1 und g_1 nennen, zwischen denen wieder die Beziehung $G_1 m = g_1$ besteht. Würden beide Körper zu Beginn der 2. Sekunde ruhen, so wären ihre Geschwindigkeiten am Ende der 2. Sekunde G_1 und g_1 und die zurückgelegten Wege $\frac{G_1}{2}$ und $\frac{g_1}{2}$. Weil sie aber schon die Geschwindigkeiten G und g haben, so sind ihre Geschwindigkeiten am Schluß der 2. Sekunde:

$$V_2 \text{ (Planet)} = G + G_1$$

und

$$v_2 \text{ (Sonne)} = g + g_1 = Gm + G_1 m = m V_2.$$

Im Verlauf der 2. Sekunde legt der Planet den Weg $G + \frac{G_1}{2}$ und die Sonne $g + \frac{g_1}{2}$ zurück. Der Planet hat sich also in den beiden ersten Sekunden um die Strecke

$$S_2 = \frac{G}{2} + \left(G + \frac{G_1}{2}\right) = \frac{3G}{2} + \frac{G_1}{2},$$

und die Sonne um die Strecke

$$s_2 = \frac{g}{2} + \left(g + \frac{g_1}{2}\right) = \frac{3g}{2} + \frac{g_1}{2} = m\left(\frac{3G}{2} + \frac{G_1}{2}\right) = m S_2$$

fortbewegt.

Zu Beginn der 3. Sekunde sind die Beschleunigungen G_3 und g_3 geworden, und eine entsprechende Rechnung zeigt, daß für die Geschwindigkeiten am Ende der 3. Sekunde die Gleichung

$$v_3 = m V_3,$$

und für die im ganzen durchlaufenen Wege die Gleichung

$$s_3 = m S_3$$

besteht. Hat sich die Sonne zuerst in A (Fig. 17) und der Planet in B befunden, so mögen beide nach t Sekunden in A_1 und B_1 angelangt sein, wobei

Fig. 17.

für die zurückgelegten Wege die Gleichung

$$AA_1 = m \cdot BB_1$$

gelten muß.

Nach T Sekunden endlich stürzen beide Körper an der Stelle S aufeinander, und es ist

$$AS = m \cdot SB.$$

Dann ist aber auch

$$A_1 S = m \cdot SB_1.$$

Die beiden letzten Gleichungen kann man schreiben:

$$SB : SA = 1 : m$$

$$SB_1 : SA_1 = 1 : m.$$

Da 1 und m die Massen der Körper sind, so teilt S die Strecken AB und $A_1 B_1$ im Verhältnis der Massen, ist also ihr Schwerpunkt, wie aus der Statik bekannt ist. Zu der beliebigen Zeit t, d. h. zu allen Zeiten, befindet sich sonach der Schwerpunkt der beiden Massen an der Stelle S, und wir haben damit folgenden wichtigen Satz bewiesen:

Fallen zwei anfangs ruhende Massen infolge der Schwerkraft aufeinander, so bleibt ihr Schwerpunkt während der Fallbewegung in Ruhe. (Vgl. Keplers Bemerkung in Nr. 14.)

Die Anziehungskraft der Sonne und des Planeten erteilt also ihrem gemeinsamen Schwerpunkt keine Beschleunigung. Da aber bei der Bewegung eines Planeten außer dieser im Radius-Vektor wirksamen Beschleunigung keine andere vorhanden ist (von der Anziehung anderer Planeten sehen wir ab), so kann der Schwerpunkt von Sonne und Planet überhaupt keine Beschleunigung bekommen, muß also nach den Galileischen Bewegungsgesetzen ruhen oder sich mit konstanter Geschwindigkeit geradlinig fortbewegen.

Dieser wichtige Satz ist bekannt unter dem Namen des Satzes von der *Erhaltung des Schwerpunkts.*

Der Schwerpunkt von Erde und Mond bewegt sich nicht geradlinig und gleichförmig, weil zu der gegenseitigen Anziehung beider Körper noch die Anziehung der Sonne hinzukommt. Es möge hier ohne Beweis mitgeteilt werden, daß der Satz von der Erhaltung des Schwerpunktes auch für beliebig viele Massen gilt, z. B. für das gesamte Planetensystem, dessen Schwerpunkt nach dem sogenannten Apex wandert, der im Sternbilde des Herkules liegt.

Kehren wir wieder zu Fig. 17 zurück, so ist

$$AS = \frac{m}{1+m} AB \quad \text{und} \quad BS = \frac{1}{1+m} AB. \tag{1}$$

Gibt man dagegen den Massen in A und B die Größen m_1 und m_2, so ist

$$AS = \frac{m_2}{m_1+m_2} AB \quad \text{und} \quad BS = \frac{m_1}{m_1+m_2} AB. \tag{2}$$

Daß die Abschnitte richtig bestimmt sind, erkennt man sofort, wenn man sie addiert. AS und BS sind, wie diese Ausdrücke zeigen, die in einem konstanten Verhältnis verkürzten Radien AB, welche zu dem Kegelschnitt gehören, den B relativ zu A beschreibt. Diesem Kegelschnitte müssen also die Kurven ähnlich sein, die A und B relativ zu S beschreiben. Wir sind damit zur vollständigen Erkenntnis der Bewegung von Sonne und Planet gelangt:

Zwei gegeneinander gravitierende Massenpunkte beschreiben um ihren Schwerpunkt ähnliche Kegelschnitte, deren gemeinschaftlicher Brennpunkt dieser Schwerpunkt ist.

18. DOPPELSTERNE.

Bei der Bewegung von Erde und Mond um ihren gemeinsamen Schwerpunkt ist die Bahn des Erdmittelpunktes klein gegenüber der Mondbahn. Denn bedeutet in Fig. 17 A den Mittelpunkt der Erde, B den des Mondes, so findet man die Lage ihres Schwerpunktes S, indem man in Gleichung (1) Nr. 17 die Mondmasse $m = \frac{1}{81,5}$ und $AB = 60,3$ Erdradien setzt. Dann wird

$$AS = \frac{1}{82,5} \cdot 60,3 \sim \frac{3}{4} \text{ Erdradien.}$$

Der Schwerpunkt von Erde und Mond liegt also um ungefähr 1600 km ($\frac{1}{4}$ Erdradius) unter der Erdoberfläche.

Der Schwerpunkt von Sonne und Jupiter liegt zwar in der Nähe der Sonnenoberfläche, aber doch noch im Innern des Sonnenkörpers; also ist auch in diesem Falle die Bahn des Hauptsterns sehr klein gegenüber derjenigen des Begleiters.

Anders liegen die Verhältnisse bei den Doppelsternen. Die Größenordnung der beiden Massen oder *Komponenten* ist bei ihnen im allgemeinen nahezu die gleiche (siehe die Tabelle unten). Beide Komponenten beschreiben daher Ellipsen um einen Schwerpunkt, der außerhalb der Massen liegt.

Durch Beobachtung der Distanzen der Doppelsterne bestimmt man die Bahn des lichtschwächeren Begleiters relativ zum Hauptstern und gelangt dadurch zur Kenntnis der halben großen Achse a der Ellipse, d. h. man kennt ihren Winkelwert, denn ihre wahre Größe bleibt so lange unbekannt, als man nicht die Entfernung des Doppelsterns von der Erde kennt. Angenommen jedoch, eine solche Bestimmung der Entfernung r sei gelungen, und die Bahnbestimmung hätte für die halbe große Achse den Wert a'' in Bogenmaß ergeben, so ist die wahre Größe $a = r \cdot a''$. Nun lautete das dritte Keplersche Gesetz in seiner genauen Fassung:

$$n^2 a^3 = k^2 (M + m).$$

Wir wenden es auf die Doppelsterne unter der Voraussetzung an, daß das Newtonsche Anziehungsgesetz allgemeine Gültigkeit besitze, daß also k^2 einen unveränderlichen Wert habe. M und m sind die Massen der Sterne, a die eben bestimmte Halbachse. Statt n setzen wir $\frac{2\pi}{U}$, wo U die beobachtete Umlaufszeit eines Sterns um den anderen bedeutet. Da die Bewegung sehr langsam zu sein pflegt, gibt man U in (siderischen) Jahren an. Die Gleichung lautet dann

$$\left(\frac{2\pi}{U}\right)^2 a^3 = k^2 (M + m). \qquad (1)$$

Wir hatten früher k^2 aus der Erdbewegung berechnet (Nr. 11) unter Zugrundelegung des mittleren Sonnentages als Zeit-

einheit. Im vorliegenden Falle brauchen wir aber k^2 für die Zeiteinheit des siderischen Jahres. Wir wenden die letzte Gleichung deshalb auf die Sonne und Erde an, setzen $a = 1$, $U = 1$, $M = 1$ (Sonne) und $m = 0$ (Erde), und erhalten $(2\pi)^2 = k^2$. Diesen Wert setzt man in (1) ein und erhält für den Doppelstern:

$$\frac{a^3}{U^2} = M + m. \qquad (2)$$

Man kann also die Summe der Massen beider Sterne berechnen, bezogen auf die Sonnenmasse als Einheit, wenn sich die wahre Größe der Bahn eines Sterns um den anderen ermitteln läßt.

Dadurch, daß man noch die Positionen der einen Komponente in bezug auf benachbarte feststehende Sterne beobachtet, findet man die absolute Bahn dieser Komponente um den gemeinsamen Schwerpunkt. Bedeuten in Figur 17 A und B die beiden Sterne des Systems und S ihren Schwerpunkt, so möge die Bahn von A um S und diejenige von B relativ zu A bekannt sein. Da $BS = AB - AS$ ist, so kennt man nunmehr auch die absolute Bahn von B um S. Sind a_1 und a_2 die halben großen Achsen der absoluten Bahnen, so ist

$$a_2 : a_1 = BS : AS = M : m, \qquad (3)$$

wenn A die Masse M und B die Masse m hat. Aus (2) und (3) bestimmt man die Massen M und m, bezogen auf die Sonnenmasse als Einheit. In der folgenden Tabelle ist die Berechnung der Massen für drei Doppelsternsysteme ausgeführt:

	a	U	$\frac{a^3}{U^2} = M + m$	$M : m$	M	m
α Centauri	23,6	81,1	2,0	1 : 1	1,0	1,0
Sirius	20,1	50,4	3,2	11 : 5	2,2	1,0
Procyon	19,5	40,0	4,6	19 : 4	3,8	0,8

a und U beziehen sich, wie im Anfang dieser Nummer, auf die Bahn des Begleiters relativ zum Hauptstern. Die Dimensionen dieser Bahnen sind mit denen der Uranusbahn vergleichbar, deren große Halbachse = 19 astron. Einheiten

ist. Auffallend ist beim Sirius, daß sein Begleiter, ein Stern 9.—10. Größe, doch die halbe Siriusmasse besitzt.

19. DIE ERHALTUNG DER ENERGIE BEI DER PLANETENBEWEGUNG.

Ein Planet erfährt relativ zur Sonne nach Nr. 17 die Beschleunigung $-\frac{k^2(1+m)}{r^2}$, also wirkt auf ihn die anziehende Kraft:

$$-\frac{k^2(1+m)m}{r^2}.$$

Wenn diese Kraft den Planeten um das Stück $(-\Delta r)$ der Sonne näher bringt, so leistet sie die Arbeit:

$$\text{Kraft} \times \text{Weg} = \frac{k^2(1+m)m}{r^2}\Delta r.$$

Wenn die Masse m aus dem Unendlichen bis in die Entfernung r herangezogen wird, so hat man alle Elementararbeiten zu summieren, also:

$$\sum \frac{k^2(1+m)m}{r^2}\Delta r$$

zu bilden, um die gesamte Arbeit zu berechnen, welche die Sonne geleistet hat. Wenn man den Grenzübergang zu beliebig kleinen Werten Δr macht, so berechnet man eine solche Summe durch das bestimmte Integral:

$$\int_{\infty}^{r} \frac{k^2(1+m)m\,dr}{r^2} = -\left[\frac{k^2(1+m)m}{r}\right]_{\infty}^{r} = -\frac{k^2(1+m)m}{r}. \quad (1)$$

Die geleistete Arbeit erscheint hier als negative Größe, weil sie eine Ausgabe aus dem Energievorrat darstellt, für die man jedoch Energie oder Arbeit in einer anderen Form wiedererhält, z. B. indem man den angezogenen Körper auf seinem Wege einen Widerstand überwinden läßt.

Jede Masse stellt also unter dem Einfluß eines Anziehungszentrums einen Arbeits- oder Energievorrat dar, der um so größer ist, je weiter beide Massen voneinander entfernt sind: Die größte Arbeit wird nämlich geleistet, wenn eine Masse aus dem Unendlichen herangeholt wird. Die Arbeit, welche die angezogene Masse leisten kann, hängt nur davon ab,

wie weit sie an die ruhende Masse herangebracht wird, d. h. von ihrer durch r definierten Lage, in der die Masse eine gewisse Energie repräsentiert, die man *Energie der Lage* oder *potentielle Energie* nennt. Im vorliegenden Beispiel ist

$$V = -\frac{k^2(1+m)m}{r}$$

die potentielle Energie in der Entfernung r. Bezeichnet man die entsprechende Größe in der geringeren Entfernung r_1 mit V_1, so ist $V_1 - V$ der Arbeitsaufwand der anziehenden Kräfte, wenn die Masse m von r nach r_1 bewegt wird. Dieser hier auftretende Verlust an potentieller Energie ist nach dem Gesetz von der Erhaltung der Energie numerisch gleich derjenigen Energie, die dabei in irgendeiner anderen Form gewonnen wird. Um das Energiegesetz in diesem Falle nachzuweisen, wollen wir die kinetische Energie des Planeten $\frac{1}{2}mu^2$ berechnen. Nach Nr. 4 (1) war

$$u^2 = \left(r\frac{dv}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dr}{dt}\right)^2.$$

Hier setzen wir die Ausdrücke (4) und (6) aus Nr. 12 ein und erhalten:

$$u^2 = \frac{k^2(1+m)}{pr^2}(p^2 + e^2r^2\sin^2 v),$$

wobei nach der Bemerkung, die im Anfang von Nr. 16 über die relative Bewegung eines Planeten zur Sonne gemacht wurde, der Faktor $(1+m)$ hinzugefügt worden ist.

Für die Klammer kann man schreiben:

$$p^2 + e^2r^2 - e^2r^2\cos^2 v.$$

Nun folgt aber aus der Polargleichung der Planetenbahn:

$$er\cos v = p - r.$$

Setzt man dies oben ein und zieht die Glieder zusammen, so findet man für die Klammer:

$$2pr - (1-e^2)r^2 = 2pr - \frac{pr^2}{a},$$

weil $p = a(1-e^2)$ ist. Man erhält schließlich für u^2, wenn man mit $\frac{1}{pr^2}$ in die Klammer hineinmultipliziert:

$$u^2 = k^2(1+m)\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right).$$

Folglich ist die kinetische Energie des Planeten:

$$\frac{1}{2}mu^2 = \frac{k^2(1+m)m}{r} - \frac{k^2(1+m)m}{2a}.$$

Auf der rechten Seite steht die vorher mit $-V$ bezeichnete Größe, und wir können schreiben:

$$\frac{1}{2}mu^2 + V = -\frac{k^2(1+m)m}{2a}, \tag{2}$$

d. h. die Summe der kinetischen und potentiellen Energie bleibt bei der Planetenbewegung konstant. Gleichung (2) ist also der Ausdruck des Gesetzes von der Erhaltung der Energie.

Nähert sich der Planet der Sonne, so wird $\frac{k^2(1+m)m}{r}$ größer, die potentielle Energie $-\frac{k^2(1+m)m}{r} = V$ also kleiner, dafür wächst die kinetische Energie, folglich wird u größer, d. h. der Planet bewegt sich in der Sonnennähe schneller. Man kann auch sagen: Die von der Sonne dadurch geleistete Arbeit, daß der Planet näher herangezogen worden ist, kommt in der Vermehrung der kinetischen Energie zum Vorschein. Es findet also eine beständige Umwandlung von potentieller Energie in kinetische statt und umgekehrt (wenn der Planet nach dem Aphel geht). Kinematisch entspricht diesem Wechsel der Energieformen ein Hin- und Herschwingen des Planeten gegen die Sonne und eine Verlangsamung und Beschleunigung seiner Bahngeschwindigkeit.

Die *Energiegleichung* (2) läßt ferner erkennen, welchen Kegelschnitt ein Körper durchläuft, der in der Entfernung r von der Sonne die Geschwindigkeit u hat. Die Energiesumme wird nämlich nach (2) bei der Ellipse negativ. Ist sie 0, so muß $a = \infty$ sein, die Bahn also parabolisch ausfallen. Ist endlich die Konstante positiv, so ist a negativ, was eine Hyperbel bedeutet, bei der r und a entgegengesetzte Richtung haben, wo also a negativ ist, wenn wir r positiv rechnen. Wir sind also zu folgendem Resultat gekommen: Ein Körper läuft um die Sonne in einer Ellipse, Parabel oder Hyperbel, je nachdem die Summe seiner kinetischen und potentiellen Energie negativ, Null oder positiv ist.

20. DAS DREIKÖRPERPROBLEM UND DIE STÖRUNGS-THEORIE.

Wir hatten gezeigt, daß sich zwei Massenpunkte in Kegelschnitten bewegen müssen, wenn sie nur ihrer gegenseitigen Anziehung unterworfen sind. Diese Bedingung ist aber niemals genau erfüllt, weil immer noch die Anziehungskräfte anderer Massen hinzutreten. Der einfachste Fall wäre der, daß zu den zwei Massen noch eine dritte hinzugenommen würde, wodurch man zum sogenannten *Dreikörperproblem* kommt. Das nächstliegende Beispiel für dies Problem bietet sich uns in der Bewegung von Erde und Mond unter dem Einflusse der Sonne. Aber während die mathematische Untersuchung bei zwei Körpern noch sehr einfach war, sind die Schwierigkeiten beim Dreikörperproblem so groß, daß die Mathematik auf ihrem heutigen Standpunkte noch nicht zu einer Lösung des allgemeinen Falles gelangt ist. Glücklicherweise tritt uns aber im Planetensystem das Dreikörperproblem in einer etwas vereinfachten Gestalt entgegen, die eine ziemlich befriedigende Lösung bei numerischen Berechnungen erlaubt, wenn auch oft erst mit einer enormen Mühe an Rechenarbeit.

Die vereinfachenden Umstände sind folgende:

1. Einer der Körper, die Sonne, ist an Masse den beiden anderen bedeutend überlegen, so daß seine Bewegung nicht beträchtlich ist.

2. Sind die beiden anderen Körper Planeten, so ist ihre gegenseitige Entfernung so groß, daß ihre Wirkung stets weit geringer als die der Sonne ist und daher als kleine *Störung* der Bewegung im Kegelschnitt aufgefaßt werden kann.

3. Die Neigungen der Bahnebenen sind bei den großen Planeten gering, so daß die Anziehungskomponenten senkrecht zur Bahnebene immer sehr klein sind.

4. Bei den Bewegungen der Satelliten kann die Anziehung der Sonne als Störung der Satellitenbahn aufgefaßt werden, weil der Hauptplanet viel näher ist als die Sonne.

Die Berechnung einer jeden Bahn vollzieht sich so, daß man in erster Annäherung eine Kegelschnittbewegung annimmt und dann die *Störungen* dieser Bewegung berechnet,

wofür eine ganze Reihe von Methoden, *Störungstheorien* genannt, existieren.

Wegen der Anziehung der Planeten aufeinander gelten die Keplerschen Gesetze nur angenähert; daher rühren auch die in Nr. 11 und 14 bemerkten Unstimmigkeiten der Werte $\frac{U^2}{a^3}$ bei den Planeten und Satelliten. Bei den Trabanten spielt außer dem Einflusse der Sonne in einigen Fällen ihre gegenseitige Anziehung eine große Rolle. Man könnte hier einwerfen, wir hätten nach Nr. 16 die Zahlenwerte der Quotienten $\frac{a^3}{U^2(1+m)}$ zu vergleichen! Aber die Massen m sind in allen Fällen so klein gegen die Zentralmasse 1, daß auch diese Quotienten keine wesentlich bessere Übereinstimmung zeigen. Will man die Planetenmassen genauer bestimmen, als dies mit dem nur näherungsweise richtigen dritten Keplerschen Gesetze möglich ist, so muß man alle störenden Einflüsse berücksichtigen. Die Massen des Merkur und der Venus, die keine Trabanten besitzen, sind durch die Störungen gefunden worden, welche diese Planeten bei Kometenbahnen verursacht haben. Im Falle der Venus wurde auch die von ihr in der Erdbewegung hervorgerufene Störung zur Massenbestimmung verwertet.

Um sich ein anschauliches Bild von den Planeten- und Satellitenbahnen zu machen, kann man sich dieselben als Ellipsen denken, deren Elemente durch die Störungen langsamen Änderungen unterworfen sind: Die Bahnebenen führen kleine Schwankungen aus, die Knoten und die Apsidenlinien wandern im Kreise herum oder pendeln um gewisse mittlere Lagen. Hierher gehört die schon den Alten bekannte Bewegung der Mondknoten, die in 18 Jahren einmal um die Mondbahn herumgehen, so daß nach dieser Zeit der Mond wieder nahezu dieselbe Stellung zur Sonne einnimmt, die Finsternisse daher eine Periode von 18 Jahren (*Saroszyklus*) zeigen. Im Planetensystem haben die großen Achsen die geringste Veränderlichkeit, wie Poisson bewiesen hat, und die Exzentrizitäten halten sich innerhalb gewisser Grenzen, so daß für absehbare Zeit die Planetenbahnen keine völligen Umgestaltungen erfahren, die Stabilität unseres Systems also für einige Jahr-Millionen gesichert zu sein scheint.